Feuille d’exercices n°4 : Optique (I) :
- Généralités sur la lumière
- Lois de Snell - Descartes

1 – Généralités sur la lumière, aspects ondulatoires

Exercice 1 : Longueur d’onde et couleur :

Un laser émet une radiation lumineuse quasi monochromatique de fréquence $f = 4{,}73.10^{14}\ Hz$.
On donne $c = 3{,}00.10^{8}\ m.s^{-1}$ (vitesse de la lumière dans le vide).

1) Quelle est la longueur d’onde dans le vide de cette radiation ? Quelle est sa couleur ?

2) On considère maintenant que cette radiation se propage dans un milieu d’indice n = 1,66.
Quelle est la vitesse de propagation de la lumière dans ce milieu ?
Quelle est alors la longueur d’onde de la radiation du laser dans le milieu? Quelle est sa couleur ?

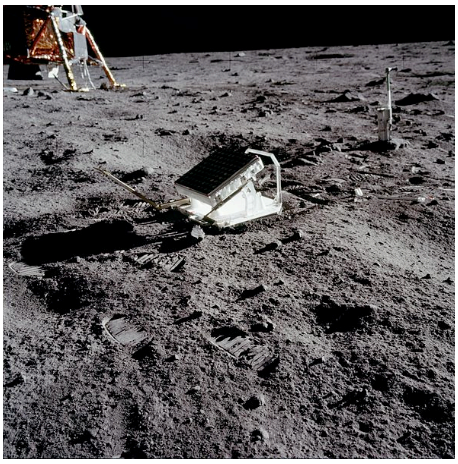
Exercice 2 : Loi de Cauchy :

La formule de Cauchy, donnant l’indice d’un verre pour une radiation monochromatique de longueur d’onde λ_0 dans le vide, est : $n = A + \frac{B}{\lambda_0^2}$ où A et B sont des constantes.
1) Donner les unités de A et de B dans le système international.

2) Des mesures effectuées avec un même verre ont donné :
n_r = 1,618 pour une radiation rouge de longueur d’onde dans le vide λ_{or} = 768 nm
n_v = 1,652 pour une radiation violette de longueur d’onde dans le vide λ_{ov} = 434 nm

a) Calculer les valeurs de A et B.
b) En déduire la valeur de l’indice pour une radiation jaune telle que λ_{oj} = 589 nm.

Exercice 3 : Le Laser Terre – Lune :


Le rétroréflecteur sur le sol lunaire


Le faisceau laser émis depuis la Terre

Pour mesurer la distance Terre – Lune avec une précision de quelques millimètres, on envoie un faisceau Laser en direction de la Lune. Une partie de la lumière du Laser est réfléchie par un rétroréflecteur, dispositif qui a la propriété de renvoyer la lumière dans la direction d’où elle arrive et qui a été disposé sur le sol lunaire par les astronautes de la mission Appolo 11 en 1969. Un téléscope terrestre recueuille ensuite une partie de la lumière renvoyée par le rétroréflecteur. La mesure précise de la durée τ de l’aller-retour de la lumière entre la surface terrestre et la surface lunaire permet de déduire la distance D entre ces deux surfaces.

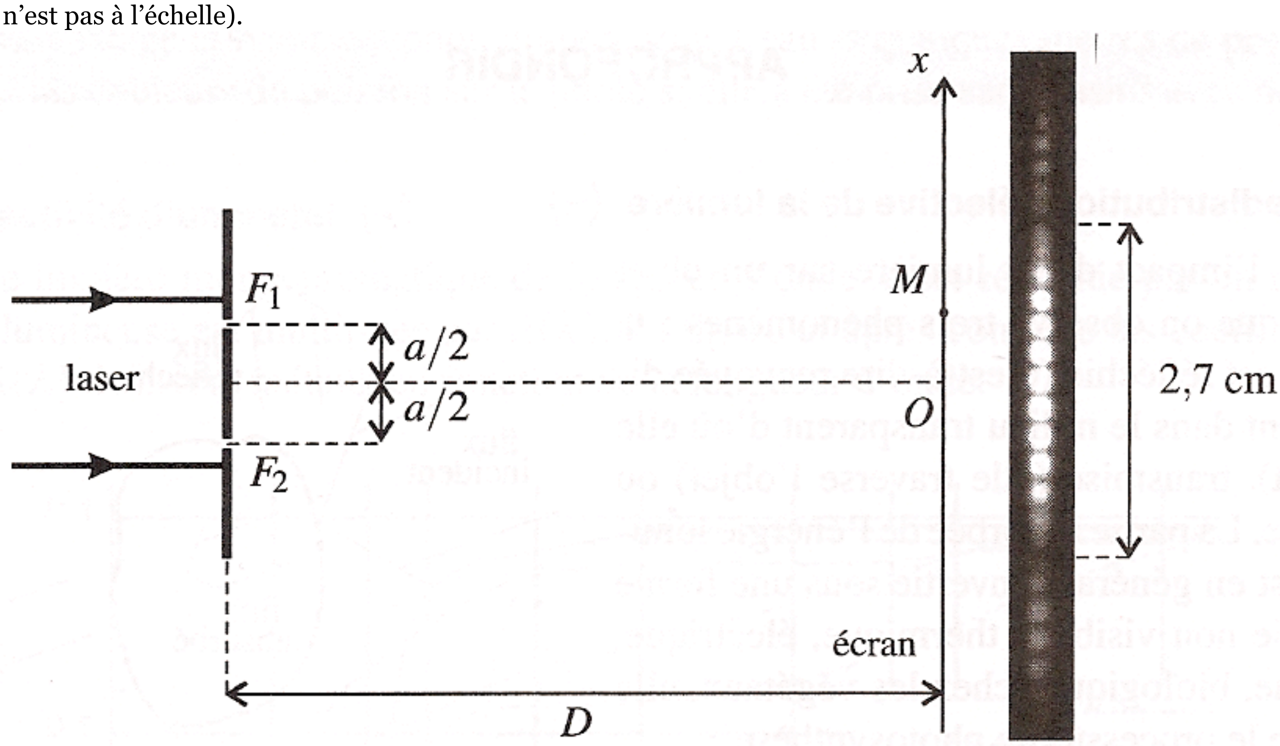
1) Sachant que $D \approx 3,76.10^8\ m$, évaluer τ. La précision de l'horloge atomique utilisée étant de 50 ps, calculer la précision relative sur la mesure de τ.

2) Le faisceau au départ de la Terre a un diamètre $a = 1,5\,m$ et sa longueur d'onde est $\lambda = 532\ nm$. Calculez son demi-angle d'ouverture sachant que le sinus de cet angle est égal à 1,22 fois le sinus du demi-angle d'ouverture d'un faisceau diffracté par une fente de largeur a.
Calculez le diamètre de la tache que fait le faisceau sur le sol lunaire.

3) Le rétroréflecteur est un carrée de côté $l = 1\ m$. Calculez la fraction ρ de l'énergie lumineuse émise depuis la Terre qui est reçue par le rétroréflecteur.
On constate en pratique, que la fraction de l'énergie reçue est encore plus petite que celle que l'on vient de calculer. Proposez une explication.

Exercice 4 : Fentes de Young :

L'expérience des fentes de Young est une expérience classique permettant d'observer le phénomène d'interférences lumineuses. Le dispositif comprend un écran opaque percé de deux fentes identiques de très petite largeur $\varepsilon = 0,070\,mm$, parallèles entre elles et distantes de $a = 0,40mm$. On envoie un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 633nm$ sur les fentes et on place un écran d'observation à distance D = 1,5 m derrière le dispositif (voir figure, qui n'est pas à l'échelle).



Sur l'écran, on observe une figure symétrique autour d'un point O, la lumière se répartissant le long d'un axe (Ox) perpendiculaire aux fentes. On observe une tache centrale très lumineuse de largeur 2,7 cm dont l'éclairement est modulé, ainsi que des taches latérales beaucoup moins lumineuses. Le but de l'exercice est d'expliquer ces observations.

1) Exprimer la largeur L de la tache centrale de la figure de diffraction que l'on observerait sur l'écran s'il n'y avait qu'une seule fente de largeur ε. Montrer que les taches centrales de diffraction des deux fentes sont pratiquement confondues.

2) On appelle champ d'interférences l'intersection des taches centrales de diffraction. Il est centré en un point O situé à égale distance des fentes et peut être considéré d'après la question précédente comme le domaine $\frac{-L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ de l'axe (Ox). Montrer que pour un point M du champ d'interférences et d'abscisse x, on a : $MF_2 - MF_1 \approx \frac{ax}{D}$ (on considèrera que $MF_1 + MF_2 \approx 2D$).

3) En déduire l'interfranges i, qui est la distance entre deux maxima (ou deux minima) d'intensité, et vérifier qu'il est égal à la valeur mesurée. Vérifier aussi que l'on trouve le bon nombre de franges brillantes (environ 11) dans le champ d'interférences.

2 – Les lois de Snell - Descartes

Exercice 5 : Principe de Fermat :

En 1657, Pierre de Fermat a énoncé le célèbre principe suivant :

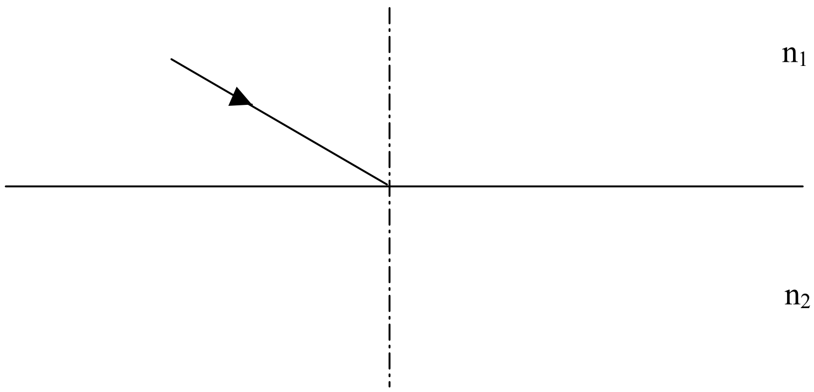
> *« La lumière prend toujours le chemin le plus rapide pour aller d'un point à l'autre ».*

Il se basait essentiellement sur un principe moral : « la nature agit toujours par les voies les plus courtes et les plus simples ».

Montrer que le principe de Fermat permet de retrouver la loi de Descartes relative à la réfraction.

Remarque : Les maîtres-nageurs peuvent donc utiliser les lois de Descartes pour déterminer le chemin idéal qu'ils doivent emprunter pour secourir quelqu'un entrain de se noyer !

Exercice 6 : Construction du rayon réfracté à la règle et au compas :



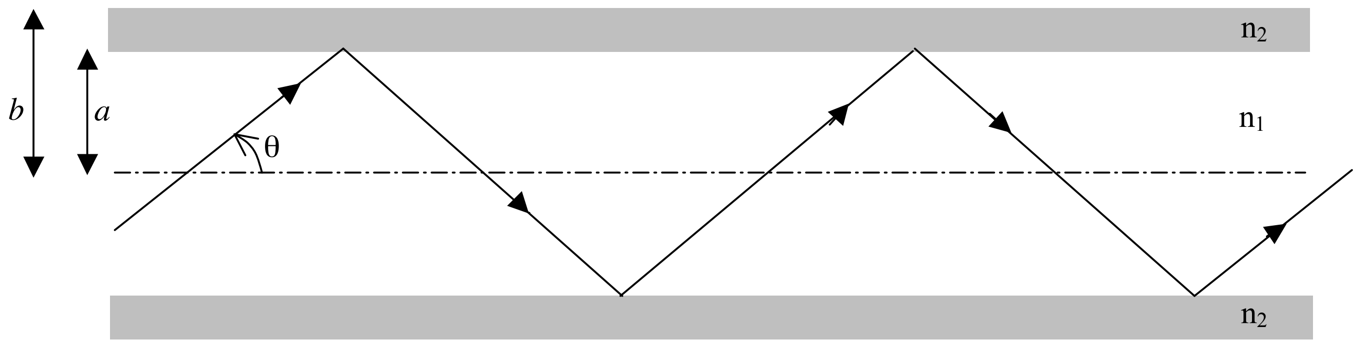
Connaissant les valeurs numériques de n_1 et n_2, comment peut-on tracer le rayon réfracté à l'aide seulement d'une règle graduée et d'un compas (et donc sans utiliser de rapporteur, ni de calculatrice).
Pour faire la construction, on prendra $n_1 = 1$ (air) et $n_2 = 1{,}33$ (eau).

Exercice 7 : Lame de verre à faces parallèles :

Construire le rayon transmis par une lame de verre (à bords parallèles) d'indice de réfraction n et d'épaisseur e. Quelle est sa direction ?
Déterminer la distance d entre le rayon transmis et le rayon incident s'il n'était pas dévié (on prendra $n = 1{,}5$, $e = 1$ cm et $i = 45°$).

Exercice 8 : Fibre optique à saut d'indice :

On considère une fibre optique constituée d'un cœur cylindrique en verre d'indice n_1 entouré d'une gaine d'indice plus faible $n_2 < n_1$. On note θ l'inclinaison par rapport à l'axe de la fibre d'un rayon se propageant dans la fibre en subissant des réflexions totales :



1) Montrer que la propagation n'est possible que si $\theta < \theta_0$, où on exprimera l'angle θ_0 en fonction de n_1 et n_2.

Application numérique : calculez θ_0 pour $n_1 = 1{,}456$ (silice) et $n_2 = 1{,}410$ (silicone).

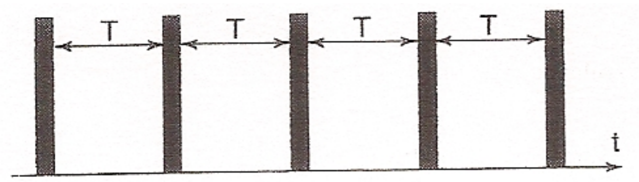
On note L la longueur totale de la fibre, a le rayon du cœur (indice n_1) et c la vitesse de la lumière dans le vide.

2) Quelle est l'expression de la durée Δt de propagation pour un rayon lumineux confondu avec l'axe de la fibre ?

3) Exprimer la durée de propagation $\Delta t'$ pour le rayon incliné de l'angle maximal θ_0 défini précédemment.

4) En déduire la différence δt des durées extrémales de propagation dans le cœur, en fonction de L, n_1 et n_2. Calculer δt pour une fibre de longueur L = 1 km constituée d'un cœur en silice et d'une gaine en silicone. On prendra $c = 3{,}0.10^8$ m.s^{-1}.

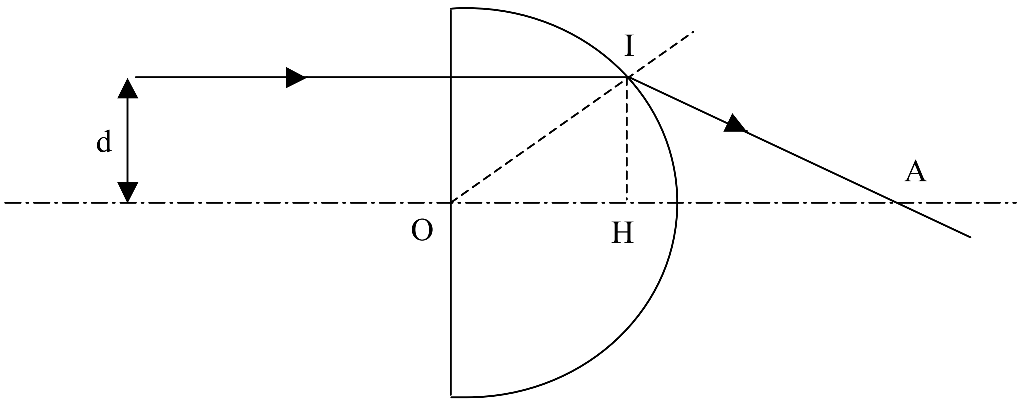
On envoie à l'entrée de la fibre des impulsions lumineuses très brèves avec une période T :



5) Quelle est la valeur minimale de T pour que les impulsions soient séparées à la sortie ?
En transmission numérique, on exprime le résultat en nombre maximum d'éléments binaires (présence ou absence d'impulsion : bit) que l'on peut transmettre par seconde. Que vaut le débit en b/s (bits par seconde) de cette fibre ? Le comparer au standard téléphone Numéris (64 kb/s) et au standard télévision (100 Mb/s).

<u>Exercice 9 : Trajet d'un rayon dans une demi-boule (d'après concours Centrale – Supélec) :</u>

On étudie le comportement d'un rayon lumineux dans une demi-boule de centre O et de rayon R, constituée d'un milieu transparent d'indice n. L'air environnant a un indice que l'on prendra égal à 1.



Le rayon arrive normalement sur la face plane de la demi-boule, il est écarté d'une distance d par rapport à l'axe optique. On note I le point d'incidence sur la partie sphérique, i l'angle d'incidence et r l'angle de réfraction en ce point. Le rayon émergent, lorsqu'il existe, coupe l'axe en A.

1) Pour quelle valeur limite d_{lim} y a-t-il réflexion totale en I ?

On considère maintenant que $d < d_{lim}$.

2) Exprimer la distance OA en fonction de R, i et r. On pourra s'aider du point auxiliaire H.

3) En déduire la position limite F' du point A lorsque d est « très » petit. On donnera l'expression de OF' en fonction de R et n.

4) Que représentent en pratique le point F' et la distance OF' ?

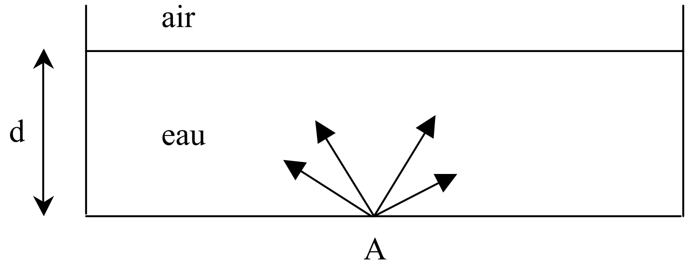
Exercice 10 : Miroir :

Quelle doit être la taille minimale d'un miroir dans lequel un homme de taille h peut se voir en entier ? Comment ce miroir doit-il être placé ?
On approximera l'homme par un segment vertical AB, le point A (en bas) représentant les pieds, et le point B (en haut) correspondant à la position des yeux.

Exercice 11 : Bassin rempli d'eau :

1) Quelle est la condition pour qu'un rayon passant de l'eau (indice n_{eau} = 1,33) à l'air (indice n_{air} = 1,00) soit réfracté ?

2) On place une source de lumière (supposée ponctuelle) au fond d'une piscine remplie d'eau, de profondeur d = 2,0 m. Donner les dimensions de la zone de la surface qui sera traversée par des rayons lumineux.



Exercice 12 : Incidence de Brewster :

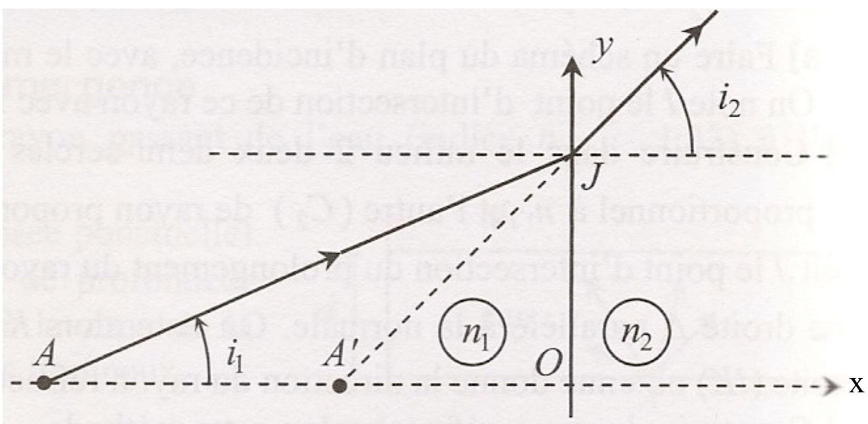
Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

1) Trouver l'angle d'incidence i_B, appelé angle de Brewster, pour lequel ces deux rayons sont perpendiculaires entre eux. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice n = 1,33.

2) Lorsque l'angle d'incidence est i_B, la lumière réfléchie est polarisée rectilignement selon la direction perpendiculaire au plan d'incidence. Quelle application du polariseur pouvez-vous imaginer en photographie à partir de cette propriété ?

Exercice 13 : Relations de conjugaison du dioptre plan et application aux relations homme – poisson :

Un dioptre plan sépare un milieu d'indice n_1 d'un milieu d'indice n_2. On considère un rayon issu d'un point A, situé dans le milieu d'indice n_1, et d'angle d'incidence orienté i_1. On note A' l'intersection du rayon réfracté avec l'axe perpendiculaire au dioptre et passant par A.

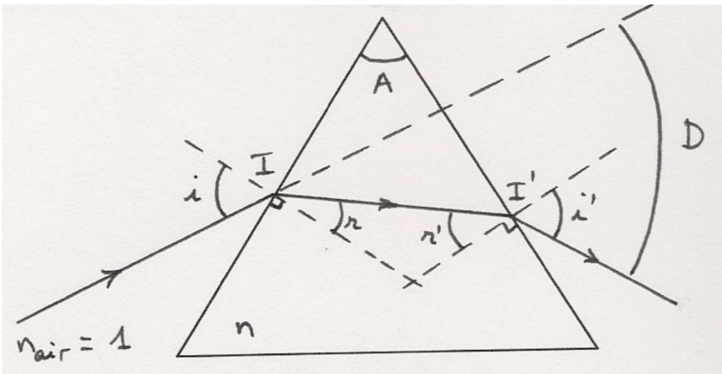


1) Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$ et des angles i_1 et i_2 (rem : les distances avec des barres au dessus sont des distances algébriques, c'est à dire qu'elles peuvent être positives ou négatives selon si elles sont dans le sens de l'axe optique ou dans le sens opposé). Le système optique constitué du dioptre plan est-il stigmatique ?

2) Simplifier le résultat de la question 1 dans le cas où l'angle i_1 est petit. Y a-t-il stigmatisme approché dans ce cas là ? Quel résultat général du cours vient-on de prouver dans le cas particulier du dioptre plan. Donner la « relation de conjugaison du dioptre plan », c'est à dire la relation qui relie $\overline{OA'}$, $\overline{OA}$, n_1 et n_2.

3) Application : Un homme dans une barque regarde un poisson sous l'eau. Les yeux de l'homme sont à 1 m de la surface et le poisson est situé à 1 m sous l'eau. L'homme est penché au bord de la barque de façon à ce que ses yeux soient à la verticale du poisson. A quelle distance sous l'homme a-t-il l'impression que le poisson se trouve ? A quelle distance au-dessus de l'eau le poisson a-t-il l'impression que l'homme se trouve ? Faites deux schémas pour illustrer cela de manière simple.

Exercice 14 : Prisme :



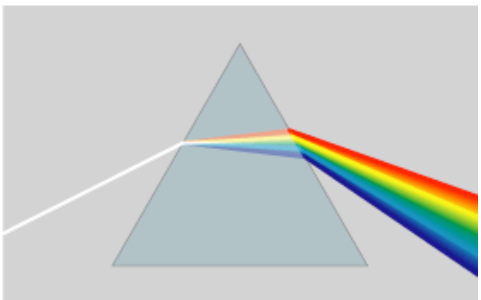
1) Etablir les 4 « relations fondamentales » du prisme. Il s'agit de :
- une relation liant i et r
- une relation liant i' et r'
- une relation liant r, r' et A
- une relation liant D à i, i' et A.

2) a) Peut-il y avoir réflexion totale en I ?
b) Peut-il y avoir réflexion totale en I' ? Si oui, calculez l'angle limite i_{lim} pour qu'un rayon réfracté puisse émerger du prisme en I', dans le cas où A = 60° et n = 1,5.

3) Dispersion :
D'après la loi de Cauchy, l'indice de réfraction n du verre varie en fonction de λ selon :

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2},$$

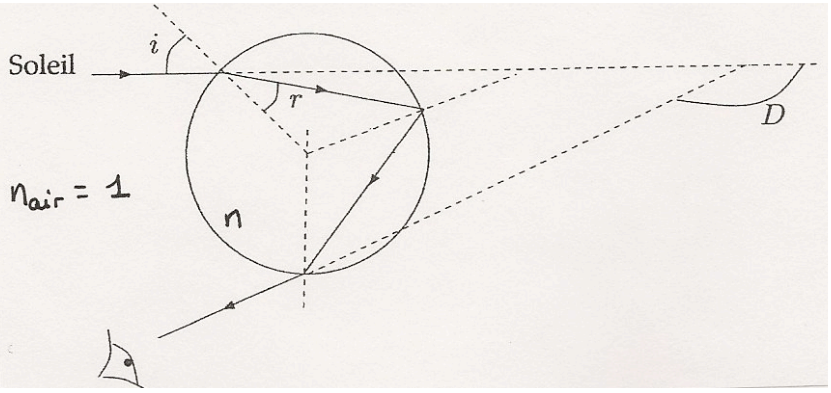
où a et b sont deux constantes positives qui dépendent du verre dont est fait le prisme.
En déduire quelle est la couleur la plus déviée et quelle est la couleur la moins déviée par le prisme.



Dispersion dans un prisme

Exercice 15 : Arc-en-ciel :

Pour pouvoir voir un arc en ciel, il faut avoir le soleil dans le dos et qu'il pleuve ou qu'il ait plu (présence de gouttelettes d'eau dans l'air).
On considère une goutte d'eau sphérique dans laquelle un rayon provenant du soleil subit deux réfractions et une réflexion (pas forcément totale). On note D l'angle de déviation du rayon lumineux (voir schéma).



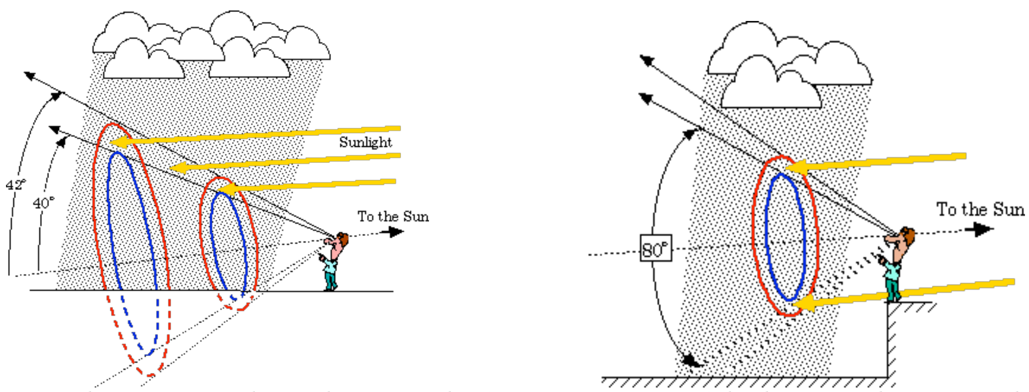
1) Exprimer D en fonction de n et i.
2) Montrer que D est extremum pour une valeur de i telle que :

$$\sin^2 i = \frac{4-n^2}{3}.$$

3) Expliquez (qualitativement) pourquoi l'intensité émergente est maximale au voisinage de cet extremum.
En déduire l'angle A que doit faire la direction dans laquelle on regarde avec la direction des rayons du soleil pour que l'on puisse voir l'arc-en-ciel. (On rappelle que l'indice de l'eau est n = 1,33).

4) En fait, l'eau est un milieu dispersif et son indice dépend de la longueur d'onde, ce qui explique que l'on voit des couleurs dans l'arc en ciel, et pas une seule bande lumineuse blanche.
En pratique, l'indice de l'eau pour de la lumière rouge vaut 1,3317 alors qu'il vaut 1,3448 pour de la lumière violette. Calculez l'angle A_r dans lequel il faut regarder pour voir le rouge, et l'angle A_v dans lequel on voit le violet. Dans quel ordre sont les couleurs de l'arc en ciel (du bas vers le haut). Quelle est la « taille angulaire » ε de l'arc en ciel ?

5) Expliquer pourquoi un arc-en-ciel est toujours accompagné d'un arc-en ciel secondaire moins lumineux et situé plus haut dans le ciel, et calculer l'angle A' auquel est situé cet arc-en-ciel.



Observation d'un arc en ciel : on doit regarder à 42° par rapport à la direction des rayons du soleil.
Si on est en altitude (par exemple dans un avion), on peut voir un cercle entier !

Arc-en-ciel primaire

Arc-en-ciel secondaire

Arc en ciel primaire et secondaire.