Feuille d'exercices n°20 :
Mouvement à force centrale

<u>Données pour l'ensemble des exercices :</u>

Constante de gravitation universelle : $G = 6{,}67.10^{-11}\ m^3.s^{-2}.kg^{-1}$
Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0.10^{24}$ kg
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4.10^3$ km

Exercice 1 : Particule soumise à une force de rappel élastique isotrope :

Dans un référentiel R galiléen lié au repère (Oxyz), un point matériel M de masse m peut se déplacer librement dans tout l'espace.

Il subit une unique force $\vec{F}$, force centrale dérivant de l'énergie potentielle $E_p(r) = \frac{1}{2} k r^2$ où k est une constante positive et r la distance OM. En coordonnées cartésiennes, les conditions initiales sont les suivantes :

$$x(0) = a > 0, \quad y(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{z}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = v_0 > 0$$

1) Déterminer la force $\vec{F}$ et exprimez la en fonction du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
2) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de M en O se conserve, et déterminer sa valeur avec les conditions initiales. En déduire que le mouvement est situé dans un plan que l'on précisera.

3) Montrer que l'énergie mécanique E_m de M se conserve, et déterminer sa valeur.

4) Démontrer que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement et préciser sa valeur. Déduire alors de la conservation de l'énergie une équation liant $r, \dot{r}$ et les constantes m, a, v_0 et k.

5) Définir une énergie potentielle effective de M. Montrer alors que la trajectoire est comprise entre deux cercles dont on donnera les rayons.

6) En utilisant le PFD, déterminer les équations horaires cartésiennes de M. En déduire la nature exacte de la trajectoire, et vérifier le résultat de la question précédente. Représenter la trajectoire sur un schéma.

Exercice 2 : Satellite sur une orbite circulaire :

Dans le référentiel géocentrique (supposé galiléen), un satellite artificiel de masse m se déplace suivant une orbite circulaire de rayon $r = R_T + h$ autour du centre de la Terre (h étant son altitude par rapport à la surface terrestre).

1) Montrer que la vitesse v est constante et donner sa valeur en fonction de G, M_T, R_T et h.

2) En déduire la période T du mouvement, et montrer que la quantité $\frac{T^2}{r^3}$ a la même valeur pour tous les satellites. Quelle est la loi équivalente pour le système solaire ?

3) Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie mécanique du satellite. Quelle est la relation simple entre les deux ? Commenter le signe de l'énergie mécanique.

4) Un satellite est dit géostationnaire s'il est immobile par rapport au référentiel terrestre. Quelle est alors sa période ? En déduire son altitude h et commenter.

5) Pour que le satellite puisse tourner, il faut d'abord le lancer ! Le satellite étant initialement immobile par rapport à la Terre, sur une base de lancement située à la latitude λ, une fusée lui fournit un travail W pour l'amener sur son orbite avec la vitesse initiale calculée précédemment.

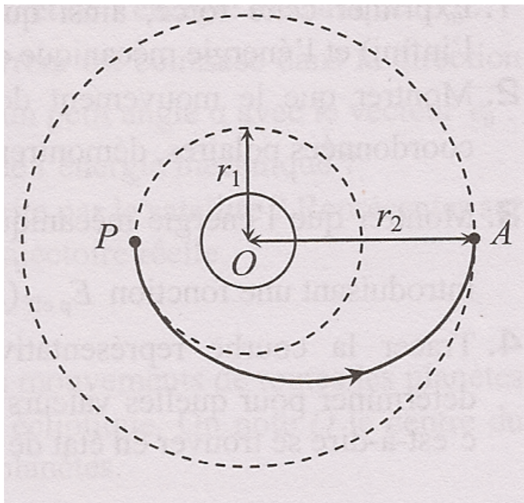
a) Quelle est l'énergie mécanique du satellite avant son lancement ? (on n'oubliera pas de tenir compte de la rotation de la Terre).

b) Calculer le travail W que la fusée doit fournir au satellite. Où doit-on placer de préférence la base de lancement ?

c) Calculer, en pourcentage, l'économie réalisée entre un lancement depuis l'équateur ($\lambda_1 = 0°$) et un lancement depuis le Nord de l'Europe ($\lambda_2 = 55°$), pour h << R. Commenter.

Exercice 3 : Changement d'orbite :

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M de masse m = 900 kg, se trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon r_1 = 7500 km autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon r_2 = 42200 km (orbite géostationnaire).



Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre de la Terre. Lorsque le satellite arrive à cet apogée, on le fait alors passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.

Ces deux changements d'orbites sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport à la période orbitale), donc on considèrera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans chaque cas).

1) Calculer la vitesse v_1 du satellite sur l'orbite circulaire basse.

2) Démontrer que sur l'orbite de transfert elliptique, le produit $C = r^2\dot{\theta}$ est une constante (en notant r et θ les coordonnées polaires su satellite).

3) Démontrer que pour une trajectoire elliptique de demi grand axe a, l'énergie mécanique du satellite s'écrit $E_m = -\dfrac{GM_Tm}{2a}$. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur chacune de ses trois orbites.

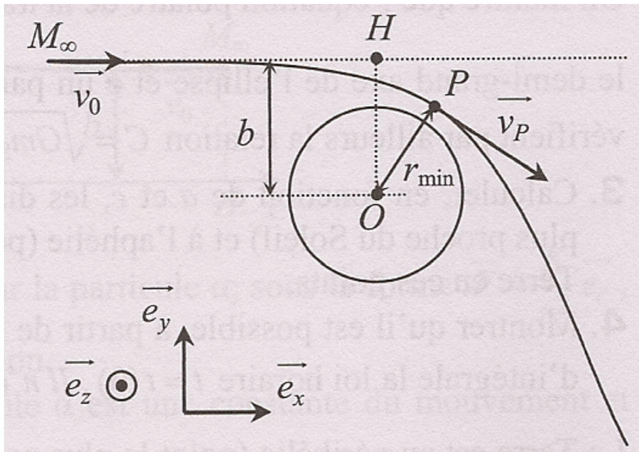
4) Calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert et la variation $\Delta v_p = v_{e1} - v_1$. Calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

5) Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 *et* r_2. Calculer v_{e2}.

6) Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert, et le second travail W_A fourni par le moteur au satellite.

Exercice 4 : Astéroïde :

De nombreux objets, dits « géocroiseurs », passent à proximité de la Terre, et parfois la heurtent.



On considère ici un astéroïde de masse m, initialement très éloigné de la Terre et de tout autre astre, et ayant donc une vitesse constante $\vec{v_0}$.
Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b (appelée « paramètre d'impact ») du centre O de la Terre.

Cependant, lorsqu'il se rapprochera de la Terre, l'attraction gravitationnelle de celle-ci va dévier l'astéroïde, selon une trajectoire hyperbolique. On appelle « périgée » le point P de cette trajectoire le plus proche du centre de la Terre.

1) Quelles sont les deux grandeurs dynamiques de l'astéroïde qui se conservent au cours de son mouvement ? Ecrire les deux équations correspondantes en considérant les deux positions M_∞ (quand l'astéroïde est infiniment éloigné de la Terre) et P (périgée de la trajectoire).

2) En déduire la distance minimale d'approche $r_{min} = OP$ (en fonction de G, M_T, v_0 et b).
Application numérique : on considère un astéroïde pour lequel v_0 = 2,0 km.s^{-1} et b = 140 000 km. Cette astéroïde va-t-il impacter la Terre ?

Exercice 5 : Satellite en orbite basse soumis aux frottements de l'atmosphère :

On étudie le mouvement d'un satellite de masse m en orbite circulaire de rayon r autour de la Terre. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans un premier temps, on suppose que le satellite n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre.

1) Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de G, M_T et r.

2) Retrouver la troisième loi de Kepler dans le cas d'une trajectoire circulaire. Faire l'application numérique pour un satellite situé sur une orbite basse à $1,0.\ 10^3$ km d'altitude.

3) Déterminer l'expression de l'énergie cinétique E_c du satellite ne fonction de G, M_T, m et r.

4) Même question pour l'énergie potentielle E_p du satellite. Donner la relation entre E_c et E_p.

5) En déduire l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite et la relation entre E_m et E_c.

6) En fait, les satellites en orbites basses subissent des frottements de la part des hautes couches de l'atmosphère. D'après les résultats de la question 5, quelle sera la conséquence de ces frottements sur la vitesse v du satellite ? Commentez.

7) Plus précisément, la force de frottement subie par le satellite est de la forme : $\vec{f} = -\alpha m v \vec{v}$ (elle est proportionnelle à la masse du satellite et à sa vitesse au carré). Cette force est suffisamment faible pour que la trajectoire du satellite soit quasi-circulaire. Dans ces conditions, les expressions des différentes énergies en fonction de r restent valables, mais r varie lentement dans le temps.
A l'aide du théorème de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle vérifiée par r, puis la résoudre.

8) Sachant qu'un satellite situé à une orbite à $1,0.10^3$ km d'altitude descend d'environ 2 m par jour, en déduire la valeur du coefficient de frottements α.

Exercice 6 : Vitesse d'un satellite à son périgée :

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse m = 1,1 t. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre – satellite varie entre d_P = 200 km au périgée et $d_A = 35,9.10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3,5.10^2\ m.s^{-1}$.

1) Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

2) Déterminer le demi grand axe a de la trajectoire.

3) En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

4) En utilisant la conservation du moment cinétique, exprimer la vitesse du satellite au périgée v_P en fonction de sa vitesse à l'apogée v_A puis faire l'application numérique.

Exercice 7 : Chute de la Terre sur le Soleil :

On assimile la trajectoire de la Terre autour du Soleil à une orbite circulaire de rayon $a = 1,5.10^{11}\,m$ parcourue en une durée T_0 = 1 an. La masse M_S du Soleil est supposée très grande devant la masse M_T de la Terre. On imagine que la Terre est stoppée sur sa trajectoire et abandonnée sans vitesse initiale à la seule attraction du Soleil.

Déterminer la durée de chute de la Terre sur le Soleil.

Exercice 8 : Etude du mouvement de satellites (Concours Mines Sup) :

La Terre possède un seul satellite naturel : la Lune. De nombreux satellites artificiels sont par ailleurs placés en orbite autour de la Terre, dans des buts variés tels que les télécommunications, la météorologie, la défense…
Cette partie se propose d'étudier quelques caractéristiques du mouvement des satellites terrestres.
On désignera par M_T et R_T respectivement la masse et le rayon de la Terre. On donne $R_T = 6370$ km, $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg. On rappelle que la constante de gravitation universelle a pour valeur $G = 6{,}67.10^{-11}\,u.s.i.$

B.l. Mouvement de la Lune autour de la Terre
On précise que cette question ne nécessite aucune connaissance préalable d'astronomie.

B.l.l. Le centre L de la Lune décrit, de manière uniforme, autour de la Terre, une orbite circulaire de centre T telle qu'en un jour le segment [TL] balaie un angle de 0,230 radian.
B.l.l.a. Déterminer la période T_L de ce mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre.
B.l.l.b. Sachant que le rayon R_{TL} de l'orbite circulaire décrite par la Lune est de $3{,}84.10^5$ km, en déduire la valeur de la masse de la Terre. Le résultat est-il cohérent à la valeur fournie en donnée.

B.1.2. On sait que la Lune, dans son mouvement autour de la Terre, nous présente toujours la même face. En déduire les caractéristiques du mouvement propre de la Lune.

B.l.3a. Le schéma (I) de la feuille annexe (à la fin de cet exercice) représente les différentes phases de la Lune. On dit que la Lune est nouvelle lorsque la face qu'elle présente à la Terre n'est pas éclairée. Identifier la nouvelle Lune sur ce schéma.

B.l.3.b. Le cycle des phases de la Lune, appelé lunaison, dure T_N = 29,5 jours. Pour expliquer la différence entre cette durée, et la période du mouvement circulaire de la Lune autour de la Terre, on doit prendre en compte le mouvement de la Terre autour du Soleil.
Sur le schéma (II), dessiner les positions de la lune lors des nouvelle lunes successives aux instant t et $t+T_N$.
Dessiner aussi la position de la lune à la date $t+T_L$
Sachant que la Terre est en orbite circulaire de période T_T = 365 jours autour du Soleil, retrouver la valeur de T_N = 29,5 jours pour la lunaison.

B.2. Quelques aspects de la satellisation
En l'absence de précision explicite, on négligera tout frottement dû à l'atmosphère sur le satellite.

B.2.1. On s'intéresse à un satellite artificiel, de masse m, en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre.
B.2.1.a. Montrer que le mouvement du satellite autour de la Terre est uniforme, et exprimer littéralement v_o de sa vitesse. On exprimera d'abord v_o en fonction de G, M_T et R, puis en fonction de g_o, R_T et R, où g_o désigne l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre.
B.2.1.b. Le satellite SPOT (Satellite sPécialisé dans l'Observation de la Terre) est en orbite circulaire à l'altitude $h = 832$ km au-dessus de la Terre. Déterminer la vitesse v_o de SPOT sur son orbite.

B.2.2 La vitesse de libération v_l d'un satellite est la plus petite vitesse qu'il faut lui communiquer à la surface de la Terre pour qu'il aille à l'infini (en « se libérant » de l'attraction terrestre). Exprimer v_l en fonction de G, M_T et R_T et calculer sa valeur.

B.2.3. Dans le cas d'une orbite circulaire du satellite autour de la Terre, montrer que l'énergie mécanique E du satellite est liée à son énergie cinétique E_c par : $E = -E_c$. Si l'on tient à présent compte de la force de frottement de l'atmosphère sur le satellite, quel est l'effet de cette force de frottement sur la vitesse du satellite ?

B.2.4. Pour un satellite de masse m en mouvement (quelconque) autour de la Terre, et uniquement soumis à la force gravitationnelle terrestre, l'énergie mécanique peut s'écrire de la même façon que celle d'un point matériel en mouvement rectiligne placé dans un potentiel effectif $U_{eff}(r)$ dont la courbe représentative est donnée sur la figure 4 :
$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + U_{eff}(r)$ avec r la distance du satellite au centre de la Terre.

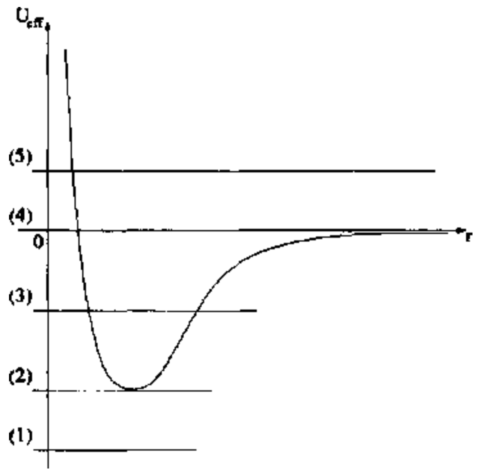


Figure 4

Après avoir justifié que l'énergie mécanique E du satellite est une constante de son mouvement, préciser pour chacune des valeurs de E (notées de (1) à (5)) représentées sur la figure 4 la nature de la trajectoire du satellite et celle de son état, lié ou de diffusion.

FEUILLE À RENDRE AVEC LA COPIE

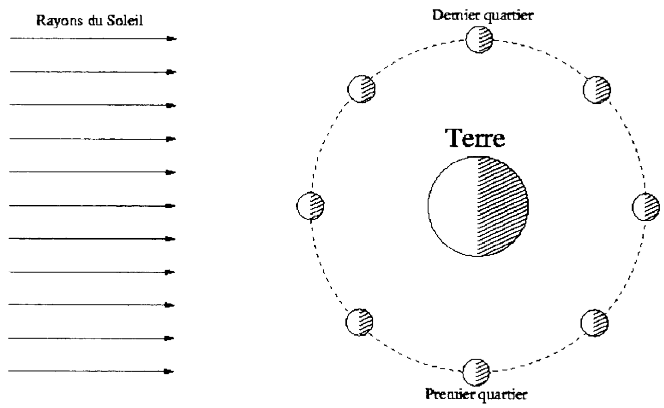


Schéma (I)

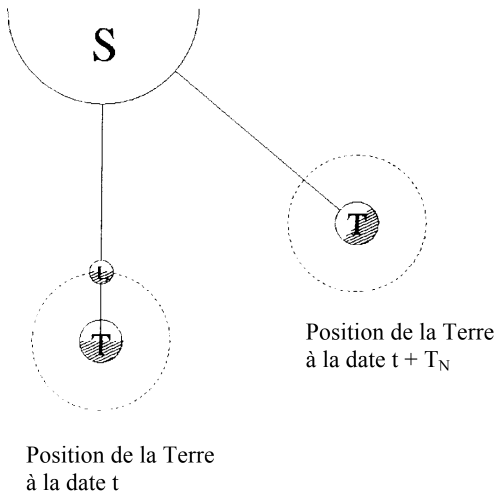


Schéma (II)

Exercice 9 : Trou noir et rayon de Schwarzchild (Concours Centrale TSI) :

On admet qu'un corps de masse M agit comme un trou noir si son rayon R est inférieur à un certain rayon critique R_c appelé rayon de Schwarzschild, défini par une vitesse de libération à la surface de ce corps égale à la vitesse de la lumière dans le vide, soit $v_l = c$.

Données :
Constante de gravitation universelle : $G = 6,67.10^{-11} u.s.i$
Masse de la Terre $M_T = 5,97.10^{24} kg$, *masse du Soleil :* $M_S = 2,0.10^{30} kg$
Rayon de la Terre $R_T = 6,4.10^6 m$, *rayon du Soleil :* $R_S = 7,0.10^8 m$
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,0.10^8 m.s^{-1}$

1) Exprimer R_c en fonction de G, M et c.

2) Application numérique : calculer le rayon de Schwarzchild R_c dans le cas du Soleil puis de la Terre.

3) Exprimer la force gravitationnelle F_{TN} exercée par un trou noir sur un objet en fonction de la masse m de l'objet, de sa distance r au centre du trou noir, du rayon de Schwarzchild R_c du trou noir et de c.
Application numérique : calculer F_{TN} pour R_c = 8,9 mm, m = 3 kg, r = 6000 km.

4) Calculer l'accélération de la pesanteur g_{TN} au niveau de la sphère de Schwarzchild en fonction de R_c et de c.
Application numérique : calculer g_{TN} pour R_c = 8,9 mm.

Exercice 10 : Vaisseau spatial (Concours Centrale MP) :

On considère un vaisseau spatial supposé ponctuel, de masse m, initialement en orbite circulaire de rayon r_0 autour d'un astre de masse M, de rayon R et de centre O. On se place dans le référentiel astrocentrique supposé galiléen. Le vaisseau a pour vitesse v_0 sur son orbite circulaire.

1) On allume le moteur pendant un temps très court, de sorte que la vitesse du vaisseau varie mais pas la distance au centre de l'astre. Déterminer la condition sur la vitesse v_1 qu'il faut communiquer au vaisseau pour qu'il échappe au champ gravitationnel de l'astre, en fonction de la constante gravitationnelle G, M et r_0, puis en fonction de v_0 uniquement.

Le commandant de bord dispose en fait d'un « budget » de vitesse Δv égal à $4v_0$. Cela signifie que la quantité de carburant disponible lui permet de faire varier la vitesse du vaisseau en une ou plusieurs fois, pourvu que la somme des valeurs absolues des variations de vitesse n'excède pas $4v_0$.

2) Option n°1 : le commandant utilise tout son budget d'un seul coup en amenant la vitesse à $5v_0$. Evaluer la vitesse finale du vaisseau « à l'infini » en fonction de v_0.

3) Option n°2 : le commandant utilise 1/8ème du budget en commençant par ralentir le vaisseau de v_0 à $v_0/2$ en un temps très court devant la période de rotation, le vecteur vitesse gardant la même direction.

3)a) Décrire la nouvelle trajectoire : exprimer le demi-grand axe a, les distances r_A à l'apogée et r_P au périgée du vaisseau au centre O, les vitesse v_A à l'apogée et v_P au périgée. Quelle condition doit vérifier r_P ?

3)b) Le reste du budget est ensuite utilisé au passage au périgée pour augmenter au maximum la vitesse du vaisseau. Justifier la nature de la nouvelle trajectoire et déterminer la nouvelle vitesse finale à l' « infini » en fonction de v_0.

4) Comparer les deux expressions et commenter.

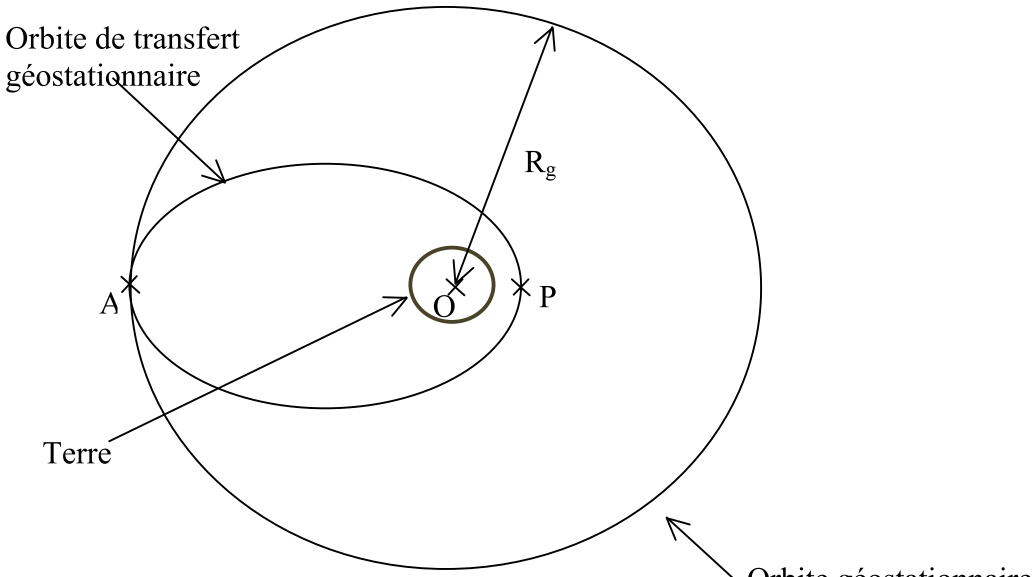
Exercice 11 : Mise en orbite d'un satellite géostationnaire :

Lors de la mise en orbite d'un satellite géostationnaire, le « lanceur » (fusée Ariane V par exemple) n'amène pas directement le satellite sur l'orbite géostationnaire, car celle-ci est très éloignée de la terre et l'opération serait donc trop couteuse en carburant.
On préfère donc utiliser une stratégie qui permet d'utiliser la force d'attraction terrestre pour amener le satellite au niveau de l'orbite géostationnaire (on parle d' « assistance gravitationnelle »).

Le satellite est d'abord placé par son lanceur sur une orbite elliptique appelée « orbite de transfert géostationnaire » dont le périgée P est situé à h = 400 km au dessus de la surface terrestre (à l'endroit où le lanceur « lâche » le satellite) et dont l'apogée A est située sur l'orbite géostationnaire (voir figure).

Au niveau de l'apogée A de l'orbite de transfert, le satellite augmente brièvement sa vitesse (en expulsant des gaz par combustion d'un peu de carburant), ce qui lui permet de passer sur l'orbite géostationnaire. Le but de cet exercice est de calculer quelle variation de vitesse Δv le satellite doit effectuer en A s'il veut passer effectivement sur l'orbite géostationnaire, ainsi que le temps que le satellite passe sur l'orbite de transfert.

Dans tout l'exercice on se place dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.



1) Exprimez et calculez le R_g de l'orbite géostationnaire. Donnez aussi l'altitude h_g de cette orbite par rapport à la surface de la Terre et comparez-la à l'altitude h = 400 km à laquelle le lanceur lâche le satellite.

2) Donner la valeur numérique du demi grand axe a que doit avoir l'orbite de transfert géostationnaire (on rappelle que le lanceur lâche le satellite au point P à une hauteur h = 400 km de la surface terrestre).

3) Donner l'expression littérale de la norme de la vitesse v_A du satellite au niveau de l'apogée A de son orbite de transfert, en fonction de G, M_T, R_g et a puis faites l'application numérique.

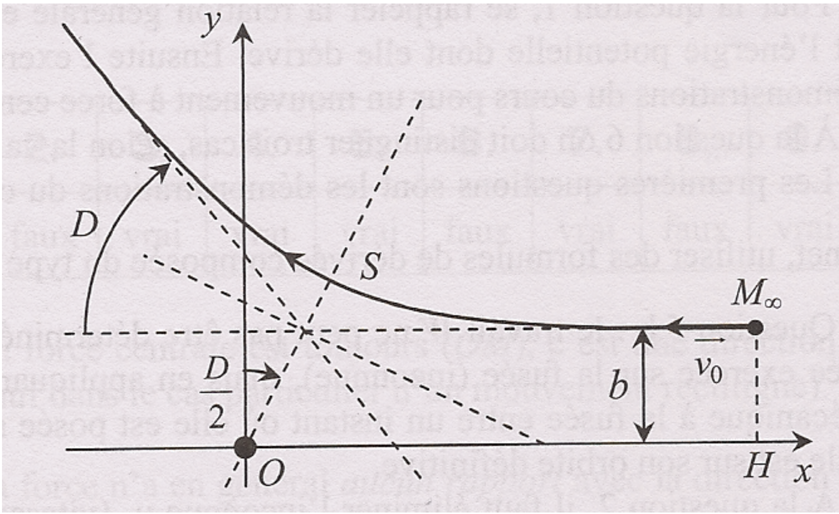
4) Au point A, le satellite allume ses moteurs pendant un temps très bref (supposé négligeable) pour passer sur l'orbite géostationnaire. Calculez (expression littérale puis numérique) la valeur de la variation de vitesse Δv qu'il doit imposer pour ce faire.

5) Calculez la durée τ que le satellite passe sur l'orbite de transfert. Vous exprimerez le résultat final en heures.

Exercice 12 : Expérience de Rutherford :

Entre 1909 et 1911, Ernest Rutherford et ses deux étudiants Hans Geiger et Ernest Marsden ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (que Rutherford avait précédemment identifiées comme des noyaux d'Hélium). Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne rencontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement : les angles de déviation pouvaient être reliés aux dimensions microscopiques, cela permit la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.

On considère ici une particule α de masse m et de charge 2e, venant de l'infini avec la vitesse $-v_0\overrightarrow{e_x}$, et s'approchant avec le paramètre d'impact b d'un noyau cible de numéro atomique Z.
Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant centré sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est une branche d'hyperbole représentée ci-dessous.



1) Donner l'expression de la force électrique subie par la particule α, sous la forme $\vec{F} = \frac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, ainsi que celle de son énergie potentielle d'interaction.

2) Montrer que l'énergie mécanique E_m de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur.

3) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ de la particule α par rapport au point O est un vecteur constant, et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. La particule étant repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy), montrer que $\overrightarrow{L_O}$ s'exprime de manière simple en fonction des variables r et $\dot{\theta}$.

4) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_p'(r)$ et expliciter la fonction $E_p'(r)$. Comment appelle-t-on $E_p'(r)$?

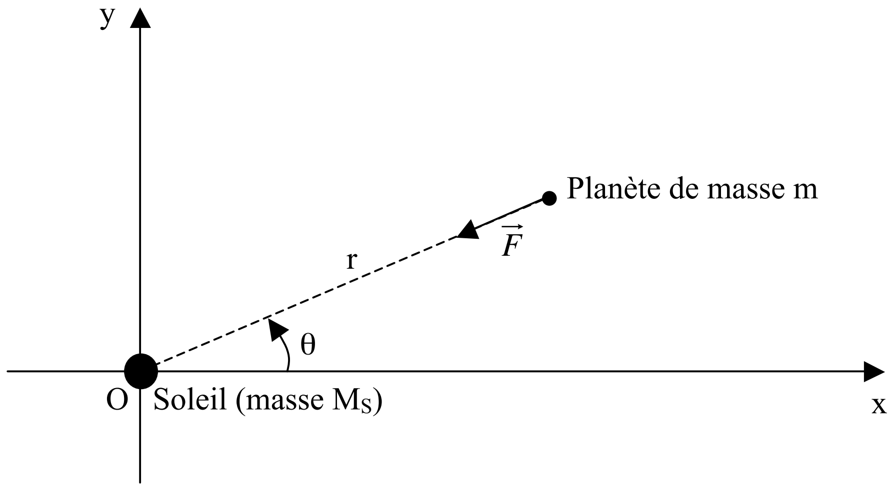
5) On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note r_{min} = OS la distance minimale d'approche. Que devient l'expression de E_m lorsque r = r_{min} ? En déduire que la valeur de r_{min} est : $r_{\min} = \frac{K}{mv_0^2}\left(1+\sqrt{1+\left(\frac{mbv_0^2}{K}\right)^2}\right)$.

6) On donne $\varepsilon_0 = 8{,}9.10^{-12}F.m^{-1}$, $e = 1{,}6.10^{-19}C$, $m = 6{,}6.10^{-27}kg$, $v_0 = 2{,}0.10^7 m.s^{-1}$ et Z= 79 pour l 'or. D'autre part on peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par $\tan\frac{D}{2} = \frac{K}{mbv_0^2}$. Calculer b puis r_{min} pour D_1 = 60° et pour D_2 = 180° (particule renvoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.

Exercice 13 : Démonstration de la première loi de Kepler :

On cherche à prouver que les trajectoires de planètes autour du soleil sont des ellipses dont le soleil occupe un des foyers.

On sait déjà que lorsque un point matériel est soumis à une force centrale, sa trajectoire est plane. On se place donc dans le plan du mouvement, et on prend pour origine O de notre repère le centre du soleil :



On veut montrer que la trajectoire de la planète est une conique (ce sera alors forcément une ellipse puisque les trajectoires des planètes sont bornées et que les seules coniques bornées sont les ellipses).

On sait qu'en coordonnées polaires, une conique est une courbe d'équation : $r(\theta) = \dfrac{p}{1 + e\cos(\theta + \varphi)}$, où p, e et φ sont des constantes (p s'appelle le « paramètre » de la conique et e son « excentricité »).

1) Prouver que la quantité $C = r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement de la planète.

2) Retrouver l'expression de l'accélération en coordonnées polaires (dans le cas général).

3) Déduire des deux questions précédentes que la composante radiale (c'est à dire portée par $\overrightarrow{u_r}$) de l'accélération de la planète peut s'écrire :

$$a_r = -C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right), \text{ en posant } u = \frac{1}{r}.$$

Cette formule, très pratique pour l'étude des mouvements à force centrale, est connue sous le nom de « formule de Binet ».

4) En déduire que l'équation $r(\theta)$ du mouvement de la planète est bien celle d'une conique. On a ainsi démontré la première loi de Kepler.