L'oscillateur harmonique

Introduction

Les phénomènes oscillatoires (ou "vibratoires") sont omniprésents dans la nature et se rencontrent donc dans tous les domaines de la physique. Citons par exemple :

— les pendules (pendule pesant ou pendule élastique) qui peuvent être utilisés (entre autres) pour mesurer le temps

— les vibrations d'un immeuble quand un camion passe à proximité

— les vibrations d'un pont qui peuvent être causées par le vent ou le passage de personnes dessus (et qui peuvent être destructrices si leur amplitude est trop grande)

— les vibrations de la croûte terrestre quand deux plaques se rencontrent (séismes ou tremblements de terre)

— les vibrations de nos cordes vocales qui nous permettent de parler, ou celles d'une corde de guitare ou de piano

— les vibrations (à l'échelle microscopique) des atomes dans les solides ou les molécules

— les oscillations dans un circuit électronique contenant une bobine et un condensateur

Ces phénomènes, bien qu'ayant lieu à des échelles extrêmement différentes et sur des systèmes très divers, peuvent être décrits par les mêmes équations mathématiques. C'est ce que l'on va voir dans ce cours.

Dans la nature, les oescillations sont toujours *amorties* (par des frottements ou d'autres phénomènes dissipatifs) et finissent donc toujours par s'arrêter si on les entretient pas. Dans ce cours, pour simplifier dans un premier temps, on va négliger toute source de dissipation d'énergie : les oscillations seront donc "idéales" et ne s'arrêteront jamais. C'est cela que traduit le terme "harmonique" dans le titre.

Parmi tout les systèmes cités précédemments, le plus simple à mettre en équation est le pendule élastique : il s'agit simplement d'une masse accrochée à l'extrémité d'un ressort. C'est donc à ce système que l'on va s'intéresser tout particulièrement, même si les résultats que l'on va obtenir seront valables pour tous les systèmes précédemment cités.

I Ressort et élasticité

On appelle *élasticité* la capacité d'un objet ou d'un matériau à s'opposer à une déformation lorsqu'on lui applique une contrainte et à reprendre son état initial quand on relâche la contrainte.

La plupart des matériaux présentent une certaine élasticité, mais certains le sont plus que d'autres. Le caoutchouc est souvent cité comme exemple de matériau élastique. Les métaux ont aussi en général une certaine élasticité. La peau humaine est plutôt élastique (faites l'expérience en tirant la peau de vos avant-bras) mais perd beaucoup de son élasticité avec l'age.

Il y a cependant une limite à l'élasticité des matériaux : si vous tirez trop sur un caoutchoux, il va finir par se déformer de façon irréversible, voire se rompre.

Le système qui illustre le mieux la propriété d'élasticité est le ressort : quand on déforme un ressort (en l'étirant ou en le comprimant) celui-ci exerce une force qui tend à le faire revenir à son état "au repos", et si vous relâchez votre contrainte, le ressort va effectivement revenir à son état au repos.

On se demande donc comment s'exprime la force exercée par le ressort lorsqu'il est déformé (cette force est appelée *force de rappel*). Il est asse évident que celle-ci doit dépendre de l'*élongation* $(l - l_0)$ du ressort, c'est à dire de l'écart entre la longueur qu'on lui impose et sa longueur repos (ou "longueur à vide").

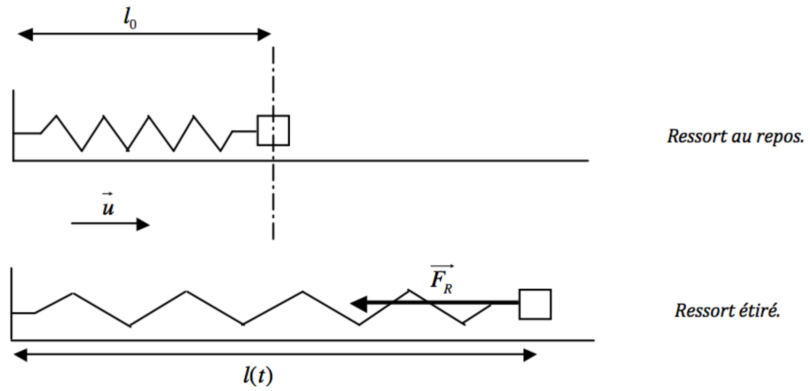


FIGURE 1 – Principe du ressort

Une étude expérimentale assez basique (qui demande seulement de disposer d'un ressort, d'une règle et de quelques masses) permet en fait de constater qu'en bonne approximation *la force de rappel est proportionnelle à son élongation*[1], ce que l'on peut écrire mathématiquement comme :

$$\boxed{\vec{F_R} = -k(l - l_0)\vec{u}}$$

où le signe moins dépend de l'orientation du vecteur unitaire $\vec{u}$: vérifiez bien que le signe moins est ici nécessaire compte tenu de l'orientation de $\vec{u}$ choisie.

La constante de proportionalité k s'appelle la *constante de raideur* du ressort, et est d'autant plus grande qu'il est difficile de déformer le ressort.

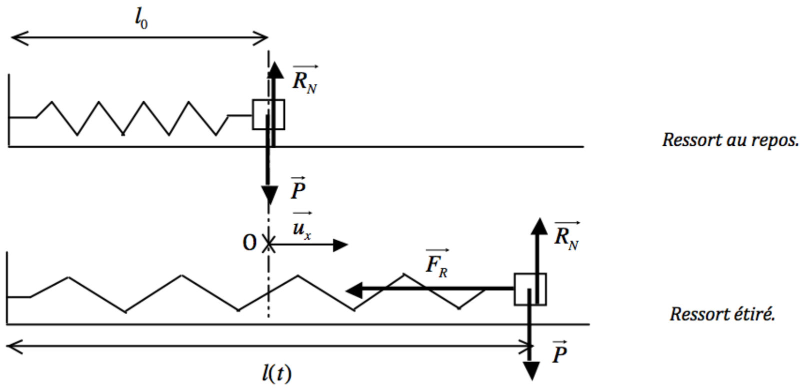
Cette loi s'appelle la loi de *Hooke* (le physicien anglais Robert Hooke l'avait exprimée en 1678 par une petite phrase en latin : *ut tensio, sic vis*, ce qui signifie littéralement : "comme l'extension, ainsi la force", autrement dit, en langage plus moderne : "la force est proportionnelle à l'extension").

II L'équation différentielle de l'oscillateur harmonique

On va considérer un système constitué d'un ressort (de raideur k et de longueur à vide l_0 dont une extrémité est maintenue immobile et tel que l'on accroche une masse m à son autre extrémité. La masse peut se déplacer sur un banc à coussin d'air, qui permet de supprimer les frottements solides (on négligera par ailleurs les frottements fluides dus à l'air).

La masse est donc soumise à son poids et à la réaction normale exercée par l'air (ces deux forces se compensent forcément sinon la masse s'élèverait dans les airs ou s'enfoncerait dans le support) ainsi qu'à la force de rappel exercée par le ressort.

1. du moins à condition que l'extension ne soit pas trop grande, sinon la proportionalité ne sera plus vérifiée et il faudra rajouter des termes correctifs



Si on applique la deuxième loi de Newton à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient donc :

$$m\vec{a} = \vec{F_R} + \vec{P} + \vec{R_N} = \vec{F_R} = -k(l - l_0)\vec{u_x}$$

Choisissons comme origine de notre repère la position de la masse lorsque le ressort est au repos (ce qui revient à poser $x = l - l_0$). On a alors $\vec{F_R} = -kx\vec{u_x}$.

De plus : $\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(x\vec{u_x}) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u_x} = \ddot{x}\vec{u_x}$ (en utilisant la notation de Newton où la dérivée est représentée par un point au dessus de la fonction).

On obtient donc :

$$m\ddot{x}\vec{u_x} = -kx\vec{u_x}$$

d'où, en projetant sur $\vec{u_x}$, sachant que $\vec{u_x}.\vec{u_x} = ||\vec{u_x}||^2 = 1$:

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Le rapport $\frac{k}{m}$ est homogène à des s^{-2}. Il est commun (dans une équation différentielle du second ordre comme ici) de le noter ω_0^2.

On obtient donc la forme canonique de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

Remarque : Ne vous laissez pas embrouiller par les notations ! Il ne faut pas voir x ici comme une coordonnée d'espace, mais comme une *fonction du temps x(t)* représentant l'élongation du ressort. Si on utilisait des notations plus proches de celles des maths, cette équation différentielle pourrait s'écrire : $f'' + \alpha f = 0$ où $f(t)$ est la fonction à déterminer, et α une constante positive.

III Résolution de l'équation différentielle

L'équation différentielle [2] précédente est :

- linéaire
- homogène (le second membre est égal à zéro)
- à coefficients constants

2. Une équation différentielle est tout simplement une équation dont l'inconnue est une fonction

— du second ordre (c'est à dire que la plus haute dérivée est une dérivée seconde)

Pour résoudre une telle équation, une méthode classique consiste à chercher des solutions sous la forme $x(t) = e^{rt}$ où r est une constante à déterminer.

Si $x(t) = e^{rt}$ alors $\ddot{x} = r^2 e^{rt}$, ce qui donne, en remplaçant dans l'équation et en simplifiant par e^{rt} :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$

d'où :

$$r = \pm i\omega_0$$

Ainsi $x_1(t) = e^{i\omega_0 t}$ et $x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$ sont solution de l'équation différentielle. On peut facilement vérifier que toute *combinaison linéaire* de ces deux fonctions est encore solution. On admettra qu'il n'en existe pas d'autres.

Ainsi, toutes les solutions de l'équation différentielle peuvent se mettre sous la forme :

$$x(t) = \alpha e^{i\omega_0 t} + \beta e^{-i\omega_0 t}$$

où α et β sont deux constantes (complexes) dépendant des conditions initiales.

De plus, comme $e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i\sin(\omega_0 t)$), on peut aussi écrire la solution générale sous la forme :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

où A et B sont deux constantes (réelles ici, puisque $x(t)$ est réelle) à déterminer à partir des conditions initiales.

Enfin, on peut se convaincre par un peu de calcul que cette dernière écriture est équivalente à une écriture de la forme :

$$\boxed{x(t) = X_m\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

où $\boxed{X_m = \sqrt{A^2 + B^2}}$ s'appelle *l'amplitude* du mouvement et φ (qui vérifie $\tan(\varphi) = -\frac{B}{A}$) s'appelle la *phase initiale.*

Représentation graphique :

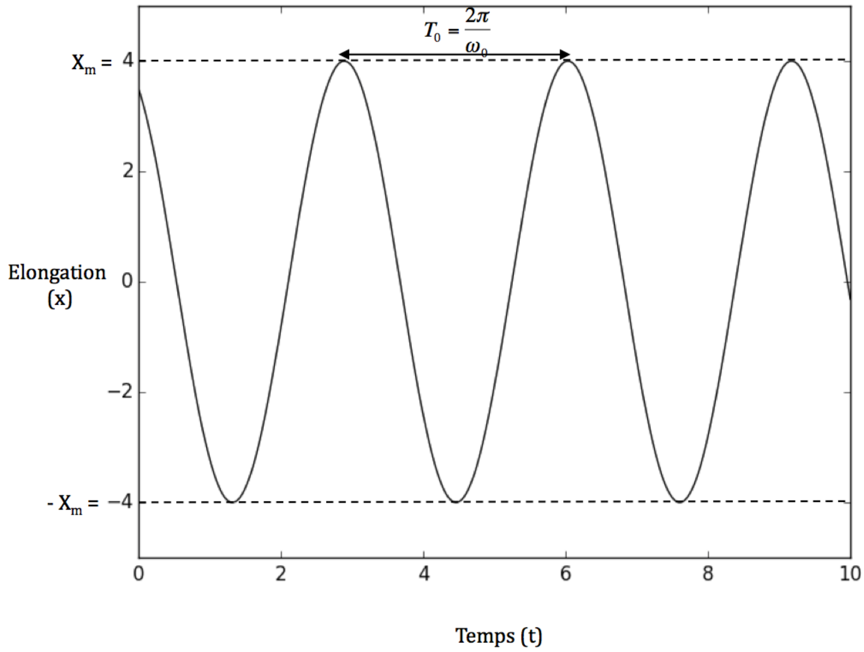


FIGURE 2 – Représentation graphique d'une solution de l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique (une telle fonction s'appelle une sinusoïde)

Ainsi le mouvement de la masse accrochée au ressort est périodique et on peut facilement se convaincre que sa période (qui est la période de la fonction $\cos(\omega_0 t + \varphi)$ est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Ainsi, puisqu'on avait posé $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on a déterminé la période des oscillations du pendule élastique :

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

IV Considérations énergétiques

Remarque : Les notions sont présentées ici de façon "intuitive" seront définies rigoureusement plus tard dans le cours de mécanique classique.

On définit en mécanique trois types d'énergie différents :

— l'énergie *cinétique*, qui est l'énergie liée au mouvement : elle est d'autant plus grande que la masse (inertielle) et la vitesse d'un objet sont grandes. Précisément, un corps de masse m et de vitesse v a une énergie cinétique :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}mv^2}$$

Pour "visualiser" un système possédant beaucoup d'énergie cinétique, vous pouvez imaginer un camion roulant très vite sur l'autoroute, ou un taureau entrain de vous foncer dessus à toute allure.

— l'énergie *potentielle*, qui, comme son nom l'indique, est une forme d'énergie un peu "cachée" mais suceptible de se transformer en énergie cinétique. C'est par exemple l'énergie d'une boule de bowling posée sur une haute étagère, ou d'un arc dont la corde serait tendue au maximum : ces systèmes sont a priori immobiles donc sans danger, et pourtant quelqu'un qui tient à sa vie ne s'aventurerait pas à passer à côté. Plus précisément, une énergie potentielle est toujours liée à une force. [3]

Pour l'instant, on retiendra les deux énergies potentielles suivantes :

- L'énergie potentielle de pesanteur, liée au poids : $\boxed{E_p = mgz + cte}$ où (Oz) est un axe vertical ascendant (on a $E_p = -mgz + cte$ si l'axe est descendant).
- L'énergie potentielle élastique : $\boxed{E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 + cte}$

On remarquera que les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près (cette constante n'ayant aucune importance et pouvant être choisie arbitrairement). Cela signifie que seules les *variations* de l'énergie potentielle ont un sens physique.

- L'énergie *mécanique*, qui est la somme des deux précédentes : $\boxed{E_m = E_c + E_p}$. L'intérêt de l'énergie mécanique est qu'elle reste constante en l'absence de frottements.

Il peut petre intéressant de vérifier que l'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique est constante (il faudrait que ce soit le cas car on a négligé les frottements).

On a :

$$\begin{aligned} E_m &= E_c + E_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 \\ &= \frac{1}{2}m(-\omega_0 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi))^2 + \frac{1}{2}k(X_m \cos(\omega_0 t + \varphi))^2 \\ &= \frac{1}{2}kX_m^2 \end{aligned}$$

(on a utilisé l'expression de ω_0 en fonction de k et m et le fait que $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$)

Ainsi, il y a bien conservation de l'énergie mécanique pour l'oscillateur harmonique.

On peut représenter schématiquement ces trois énergies sur un même graphique :

3. Mais la réciproque n'est pas vraie : on ne peut passocier d'énergie potentielle à toutes les forces : par exemple, les forces de frottements n'ont pas d'énergie potentielle associée.

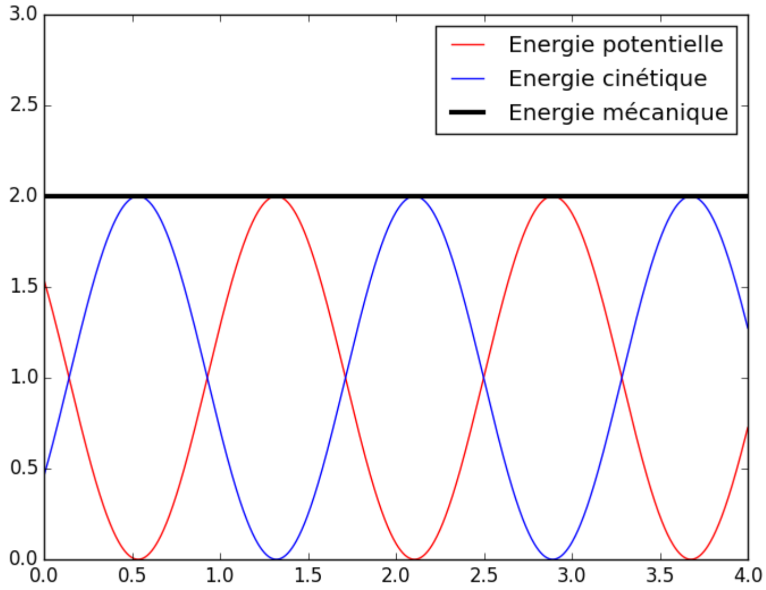


FIGURE 3 – Energie cinétique, potentielle et mécanique d'un oscillateur harmonique au cours du temps.

On notera le va-et-vient incessant entre énergie potentielle et énergie cinétique au cours du mouvement : l'énergie potentielle est convertie en énergie cinétique, qui est ensuite reconvertie en énergie potentielle, etc...

On pourra également remarquer que la période de l'énergie (cinétique ou potentielle) est la moitié de celle du mouvement, ce qui est lié au fait que la période de la fonction $\cos^2$ est la moitié de celle de cos.