TP de Physique n°5 :
Focométrie

Objectifs :

- Comme son nom l'indique, la « focométrie » est la mesure de distances focale. Le but de ce TP est donc d'apprendre à mesurer précisément (par plusieurs méthodes) la distance focale d'une lentille mince.

- Au cours de ce TP, on vérifiera au passage la validité de la relation de conjugaison de Descartes pour les lentilles minces, en effectuant une régression linéaire sur des points expérimentaux. Un objectif important de ce TP sera donc de se familiariser avec la technique de la « régression linéaire » (voir annexe à la fin).

- Vous essaierez d'être le plus précis possible, tant au niveau de la qualité des montages (vérification que le système est bien centré et que l'on est dans les conditions de Gauss) que de la lecture de distances sur le banc d'optique, et vous rédigerez un rapport clair et précis ou figureront des schémas de vos expériences ainsi que vos graphes.

I Rappels : identification rapide des lentilles et estimation de la distance focale :

1) Identification des lentilles convergentes et divergentes :

Rappelez comment, en observant des objets proches ou lointains avec une lentille, vous pouvez rapidement conclure sur son caractère divergent ou convergent.

2) Estimation rapide de la focale d'une lentille convergente

Rappelez également comment vous pouvez facilement estimer la distance focale d'une lentille convergente. Cette méthode fonctionne-t-elle pour une lentille divergente ?

II Utilisation de la relation de conjugaison de Descartes ou « méthode des points conjugués »:

Cette méthode se base sur la relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{p'}+\frac{1}{p}=\frac{1}{f'}$ en notant $p'=\overline{OA'}$ la distance algébrique entre la lentille et l'image, et $p=\overline{OA}$ la distance algébrique entre la lentille et l'objet.

On veut à la fois de mesurer précisément la distance focale d'une lentille convergente (on va utiliser la +100) et vérifier expérimentalement la relation de conjugaison de Descartes (que l'on a établie en cours par le calcul).

Pour cela, mesurez la distance algébrique p' entre la lentille et l'image pour différentes valeurs de la distance algébrique p entre la lentille et l'objet. A chaque fois, vous évaluerez également l'incertitude u(p) (resp. u(p')) sur votre mesure de la distance.
Remarque : l'incertitude u(p') est égale à la moitié de l'intervalle sur lequel vous pouvez déplacez l'écran tout en voyant l'image nette. Elle ne sera donc pas forcément la même pour toutes les mesures.

Vous prendrez au moins une dizaine de valeurs au total, en essayant de couvrir un assez vaste domaine de valeurs. En particulier, vous ferez en sorte d'avoir au moins 3 points expérimentaux pour lesquels $p=\overline{OA}>0$, ce qui correspond à un objet virtuel (vous devrez bien sûr utiliser une deuxième lentille pour créer cet objet virtuel).

Sur Excel (et/ou Regressi), vous réaliserez un tableau :

p (cm)	p' (cm)	$u(p)\ (cm)$	$u(p')\ (cm)$	$\frac{1}{p}(cm^{-1})$	$\frac{1}{p'}(cm^{-1})$	$u\left(\frac{1}{p}\right)$	$u\left(\frac{1}{p'}\right)$
…	…	…	…	…	…	…	…

Rem : pour évaluer les incertitudes $u\left(\frac{1}{p}\right)$ et $u\left(\frac{1}{p'}\right)$, vous utiliserez le fait que l'incertitude relative sur 1/p est la même que l'incertitude relative sur p, soit : $\frac{u\left(\frac{1}{p}\right)}{\left|\frac{1}{p}\right|} = \frac{u(p)}{|p|}$.

Si la relation de conjugaison de Descartes est correcte, quel type de courbe s'attend-on à trouver quand on trace 1/p' en fonction de 1/p ?

Sous Excel ou Regressi, tracez 1/p' en fonction de 1/p en faisant apparaître les barres d'erreurs, et effectuez une régression linéaire. Ce graphe doit apparaître dans votre rapport.

La relation de conjugaison de Descartes est-elle validée par vos points expérimentaux ? Quelle est la valeur de la distance focale f' (vous essaierez de donner une valeur accompagnée d'une incertitude-type).

III Une méthode de focométrie rapide et efficace : l'autocollimation :

Construire l'image du point A = F (foyer objet de la lentille convergente) par le système lentille + miroir plan :

Construire l'image de l'objet AB (situé dans le plan focal objet de la lentille) par le système lentille + miroir plan :

On déduit de ces constructions une méthode très efficace pour mesurer la distance focale d'une lentille convergente : on place sur le banc d'optique un objet (lettre F), une lentille convergente dont on cherche la focale, et un miroir plan.

A priori, au vu des constructions géométriques, le miroir peut-être n'importe où derrière la lentille, mais en pratique ne le mettez pas trop loin. Faites en sorte que le plan du miroir soit bien un plan transverse.

On fait varier la distance entre la lentille et l'objet jusqu'à ce que l'image de l'objet se forme exactement sur le même plan que l'objet (elle doit aussi avoir la même taille). La distance entre l'objet et la lentille est alors égale à la distance focale.

Mettez en œuvre ce protocole avec chacune des trois lentilles convergentes à votre disposition. Déduire f' et évaluez l'incertitude-type u(f') pour chaque mesure. Pour évaluer u(f'), remarquez qu'il est possible de modifier légèrement la position de l'objet tout en conservant une image nette. Repérez avec précision les deux positions extrêmes entre lesquelles on ne perçoit pas de différence de netteté : la distance entre ces deux positions est la profondeur de champ, assimilable ici à 2u(f').

Complétez le tableau suivant :

Lentille	1	2	3
f'_{mesure} (mm)			
u(f') (mm)			
$f'_{constructeur}$ (mm)			

IV Mesure de la focale d'une lentille mince divergente :

Expliquez quelle est la difficulté majeure quand on veut mesurer la focale d'une lentille divergente, qui fait que la plupart des méthodes utilisées pour les lentilles convergentes ne s'appliquent plus.

1) Formation d'un doublet accolé :

Pour se faire une première idée de la distance focale de la lentille divergente, on peut l'accoler à une lentille convergente de courte focale (par exemple la +50 mm), de manière à ce que le doublet soit convergent, et évaluer la focale du doublet par autocollimation. Connaissant la focale du doublet et celle de la lentille convergente, on en déduit une estimation de la focale de la lentille divergente (vous expliquerez comment).

Mettez en œuvre cette méthode avec la lentille divergente portant l'indication -200.

2) Méthode de Badal :

Pour cette méthode, deux lentilles convergentes complémentaires sont nécessaires. La première, L_1, donne de l'objet A une image à l'infini. La seconde, L_2, de distance focale f_2' connue, est disposée après L_1 à une distance supérieure à f_2'. Le système donne de A une image A' sur un écran.

On place alors la lentille étudiée L (divergente, de focale f' inconnue) dans le plan focal objet de L_2. Pour obtenir une image nette A'' de A, il faut déplacer l'écran de la distance algébrique X. On obtient la distance focale de L par la relation :

$$f' = -\frac{(f_2')^2}{X} \quad (1)$$

- Faire un schéma représentant le principe de mesure et utilisez-le pour démontrer la relation (1).

- Mettez en œuvre cette méthode pour déterminer la distance focale f' d'une des lentilles divergentes à votre disposition. Y a-t-il un accord satisfaisant avec la valeur indiquée par le constructeur ?

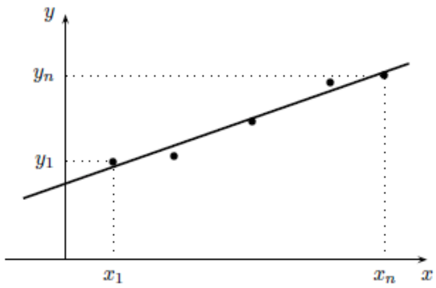
V Complément (s'il vous reste du temps) : Méthode de Bessel (pour une lentille convergente) :

Cette méthode utilise la propriété suivante, démontrée en cours : pour une distance D > 4 f' entre un objet et un écran, il existe deux positions de la lentille, distantes de d, pour lesquelles l'image est nette. De plus, D, d et f' vérifient la relation :

$$f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

Démontrez cette relation et utilisez-la pour mesurer la distance focale de la lentille convergente de votre choix.

Annexe : La régression linéaire



A - Le principe de la régression linéaire :

a) Position du problème et méthode des moindres carrés :

On considère deux grandeurs physiques X et Y (par exemple la pression d'un gaz et sa température) et on veut tester l'hypothèse qu'il existe une relation affine entre ces deux variables, c'est à dire une loi du type :

$$Y = aX + b$$

Pour tester expérimentalement cette loi, on va mesurer les valeurs (y_1, ... , y_n) de Y pour différentes valeurs (x_1, ..., x_n) de X, et faire apparaître les points (x_i, y_i) sur un graphe. L'hypothèse sera validée si l'alignement des points est suffisamment bon, et les coefficients a et b sont respectivement la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite qui passe le plus près des points expérimentaux.

La technique de « régression linéaire » consiste donc à déterminer la droite qui passe « le plus près » d'un ensemble de points expérimentaux.
Il nous faut pour cela définir de façon mathématique ce que l'on entend par « le plus près ». En pratique le critère que l'on utilise est celui des « moindres carrés » : la droite correspondant au meilleur ajustement sera celle qui minimise la quantité : $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$, où $\varepsilon_i = y_i - (ax_i + b)$ représente l'écart entre la droite et le point expérimental (x_i, y_i).

b) Coefficient de corrélation r :

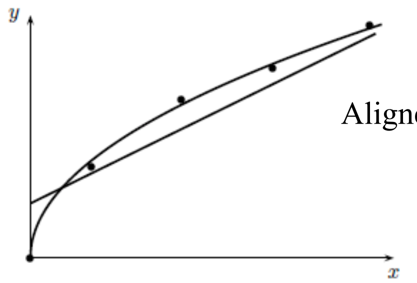
Les logiciels de calcul (Excel, Régressi, calculatrices) sont capable d'effectuer une régression linéaire, c'est à dire de déterminer les coefficients a et b qui permettent le meilleur ajustement. Ils fournissent également un coefficient noté r, appelé « coefficient de corrélation » toujours compris entre -1 et 1, qui vérifie :

- r = +1 si tous les points sont parfaitement alignés selon une droite de pente positive
- r = -1 si tous les points sont parfaitement alignés selon une droite de pente négative
- r est d'autant plus proche de 0 que l'alignement est mauvais

Rem : certains logiciels donnent plutôt le carré de ce coefficient, soit r^2.

En général, on considère que l'alignement est correct (et donc le modèle linéaire validé) si r (ou r^2) est supérieur à 0,99 (voire 0,999 si on est très exigeant).

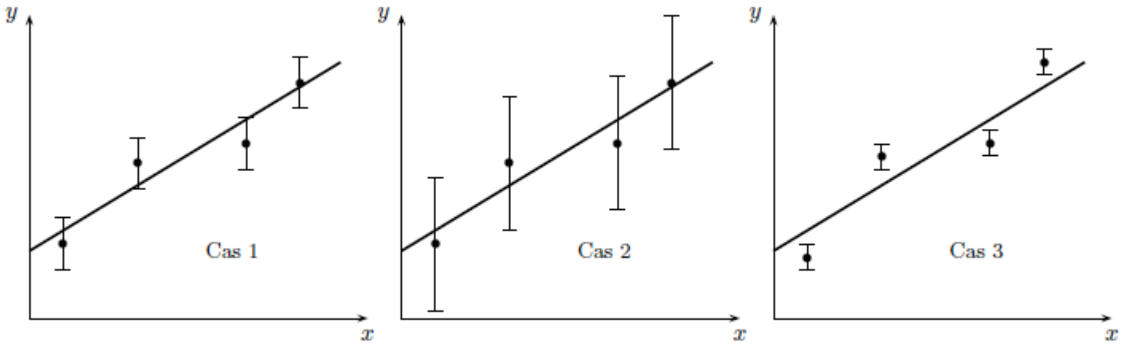
Attention : des points qui ne sont clairement pas alignés peuvent donner un coefficient de corrélation supérieur à 0,9 comme le montre l'exemple ci-dessous, pour lequel les points sont en fait sur la courbe $y = \sqrt{x}$ et pourtant une régression linéaire conduit à r = 0,96.



Alignement défaillant et r = 0,96

c) Prise en compte des incertitudes-types (barres d'erreur) :

Comme nos données (x_i, y_i) sont expérimentales, on peut leur associer des incertitudes-types, et donc mettre des barres d'erreur sur le graphique. Ces barres d'erreur sont à prendre en compte lors de l'analyse de la régression linéaire, comme le montrent les exemples suivants :



- Cas 1 : l'écart entre les points expérimentaux et la droite est du même ordre de grandeur que les barres d'erreur. On peut valider le modèle linéaire.

- Cas 2 : les barres d'erreurs sont nettement plus grandes que la distance moyenne qui sépare les points de la droite. De nombreuses droites sont capables d'intercepter toutes les barres d'erreur, et les valeurs de a et de b qui résultent de la régression linéaire sont donc peu fiables.

Cas 3 : Les barres d'erreur sont inférieures à la distance entre la droite et les points. la droite ne passe par aucune barre d'erreur.

-> Dans les cas 2 et 3, soit la loi affine est à remettre en cause, soit l'estimation des barres d'erreur est à revoir.

B - Réaliser une régression linéaire avec Excel ou OpenOffice :

a) Tracé du graphe :

Entrer les données dans deux colonnes (x à gauche et y à droite). Entrer éventuellement deux autres colonnes correspondant à Δx et Δy. Sélectionner les deux colonnes (x et y) puis cliquer sur Insertion -> Graphique et sélectionner « Nuage de points » (sans relier les points entre eux). Entrer les légendes des axes et le titre du graphe.
Une fois le graphe affiché, placer les barres d'erreurs verticales et horizontales (clic droit sur un des points puis « format de série de données » et « barres d'erreur »).

b) Afficher la droite de régression linéaire :

Cliquez droit sur un point du graphe et sélectionnez « afficher une courbe de tendance ». Sélectionnez la régression linéaire, et dans « options », demandez l'affichage de l'équation de la droite ainsi que de r^2 (vous pouvez également obliger le passage de la courbe par 0 si cela vous paraît judicieux).

c) Pour obtenir plus d'informations :

La fonction DROITEREG d'Excel permet non seulement d'obtenir a, b et r^2 mais aussi les erreurs commises respectivement sur a et sur b.
Cette fonction nécessite de sélectionner l'espace nécessaire à l'affichage de tous les résultats, c'est à dire une zone vide de deux carreaux de large par trois carreaux de haut. Taper ensuite :

=DROITEREG([données Y] ;[données X] ; 1, 1)

et terminez en tapant « Ctrl+Shift+Entrée » pour qu'Excel remplisse directement la matrice 3 x 2 selon le tableau suivant :

a	b
u(a)	u(b)
r^2	XX

Remarque : vous pouvez peut-être plus avantageusement utiliser le logiciel Regressi (qui est disponible lors des TP des concours), qui donne l'incertitude sur a et b de manière plus directe.

d) Et avec la calculatrice ?

La plupart des calculatrices graphiques sont également capable de faire des régressions linéaires sur des tableaux de données. Consultez le manuel de votre calculatrice pour voir comment faire. Cela peut-être utile aux écrits des concours car il arrive que le sujet donne un tableau de données et demande de déterminer le coefficient directeur de la droite qui interpole le mieux les données.

C - Et si on veut tester un autre modèle qu'une droite ?

Bien sûr, en physique/chimie, de nombreuses loi ne sont pas linéaires, et on peut vouloir tester une autre relation entre les variables Y et X. Par exemple :

$Y = b.\exp(aX)$ (loi exponentielle)

$Y = b.x^a$ (loi de puissance)

$\sin(Y) = a\sin(X)$ (pour les lois de Descartes)

La plupart des logiciels de calculs permettent de modéliser d'autres lois qu'une loi linéaire (lois exponentielles, de puissances, logarithmiques…). Cependant, il est préférable de toujours se ramener, dans la mesure du possible, à une droite, en définissant de nouvelles variables.

Par exemple, si on veut tester une loi exponentielle (premier exemple). On pourra définir une nouvelle variable $Y' = \ln(Y)$ et on tracera Y' en fonction de X. Puisque $Y' = aX + \ln(b)$, la relation entre Y' et X doit être linéaire et on peut donc utiliser une régression linéaire.

Un des intérêts de toujours se ramener à une droite est que c'est essentiellement la seule courbe que l'on peut vraiment reconnaître à l'œil nu. A moins d'avoir l'œil extrêmement entrainé, on est par exemple incapable de reconnaître un morceau d'hyperbole (courbe $y = 1/x$) d'un morceau de la courbe $y = \exp(-x)$.