TP de Physique n°17
« Pendules »

I « Pendule pesant » vs. « pendule simple » :

1) Pendule pesant : on considère une tige (rigide) de longueur L et de masse M capable d'osciller (dans un plan vertical) autour d'un axe horizontal passant par une de ses extrémités. La liaison pivot entre la tige et le bâti au niveau de l'axe de rotation est supposée parfaite. On note $\theta(t)$ l'angle entre la direction de la tige et la verticale à un instant t. (Faites un schéma !)

a) En utilisant le théorème du moment cinétique, établir l'équation différentielle satisfaite par l'angle $\theta(t)$.

b) Retrouver cette équation différentielle en utilisant le théorème de l'énergie cinétique.

c) Déduire de l'équation différentielle l'expression de la période T des petites oscillations du pendule pesant en fonction de la longueur L de la tige et de l'accélération de la pesanteur g.

d) Réaliser l'expérience en utilisant la règle métallique comme tige. Mesurer expérimentalement la période des petites oscillations et calculer l'écart relatif (en %) avec l'expression théorique obtenue précédemment.

2) Pendule simple : un pendule simple est constituée d'une ficelle de longueur L à l'extrémité de laquelle on a accroché une masse (quasi ponctuelle) M (l'autre extrémité étant maintenue fixe). On note $\theta(t)$ l'angle entre la direction de la ficelle et la verticale.

a) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle satisfaite par $\theta(t)$ et en déduire l'expression de la période des petites oscillations (en fonction de L et g).

b) D'après vos études théoriques, combien vaut le rapport $\alpha = \frac{T_s}{T_p}$, où T_s est la période des petites oscillations d'un pendule simple de longueur L et T_p la période des petites oscillations d'un pendule pesant de même longueur L.

c) Mesurer expérimentalement α. L'accord avec la valeur théorique est-il satisfaisant ? (sinon, comment l'expliquer ?)

II « Peser la Terre » : Expérience historique de Henry Cavendish avec un pendule de torsion :

Henry Cavendish (1731 – 1810) est un célèbre scientifique anglais, qui a réalisé des travaux remarquables en physique et en chimie expérimentales. En chimie, on lui doit notamment la découverte de l'hydrogène, qu'il nomma « gaz inflammable » (le nom actuel « hydrogène » a été donné un peu plus tard par Lavoisier) et des études sur la composition de l'air atmosphérique.

En physique, on lui doit de nombreuses avancées dans le domaine de l'électricité (entre autres le concept de « potentiel électrique »), mais il est surtout rentré dans l'histoire comme étant le premier scientifique a avoir déterminé la masse de la Terre, grâce à une expérience utilisant un pendule de torsion, mis au point par le géologue John Mitchell (qui est mort avant d'avoir pu réaliser son expérience).
Cavendish a repris le montage de Mitchell et l'a grandement perfectionné pour éliminer de nombreuses sources d'erreur (la mesure étant assez ardue !). Grace à son dispositif, Cavendish a pu mesurer la masse de la Terre en 1798 avec moins de 1% d'erreur par rapport aux mesures actuelles. Dans son article, Cavendish affirme en fait avoir mesuré la « densité » de la Terre. Cependant, comme

le rayon (et donc le volume) de la Terre étaient déjà connus depuis longtemps, connaître la densité de la Terre était équivalent à connaître sa masse.
De plus, en pratique, pour connaître la densité de la Terre, Cavendish a en fait mesuré (indirectement) la constante de gravitation universelle G (qui avait été introduite une centaine d'années plus tôt par Isaac Newton). De nos jours, on trouve donc souvent dans la littérature des affirmations comme « Cavendish a déterminé la masse de la Terre » ou « Cavendish a déterminé la constante de gravitation universelle », bien que, pour ce dernier, plus modestement, il s'est contenté de mesurer la « densité de la Terre ».

L'énoncé qui suit, qui explique et interprète l'expérience de Cavendish, est extrait du concours d'entrée en troisième année à l'ENS Cachan, session 2009.

En 1687, Isaac Newton publia ses Principes Mathématiques de Philosophie Naturelle dans lequel il montre que deux effets apparemment très différents (la pesanteur et le mouvement des corps célestes) sont en fait le résultat d'une seule et même cause : la gravitation universelle. A partir des travaux de Johannes Kepler sur l'étude du mouvement des planètes, il énonce la loi gravitationnelle (interaction proportionnelle au produit des masses et inversement proportionnelle au carré de la distance).

On propose ici d'étudier dans un premier temps la mise en oeuvre de l'expérience de Henry Cavendish (1798) qui a permis de déterminer une première valeur de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ (parties I et II) et ensuite d'étudier un phénomène lié à la gravitation, le phénomène des marées (parties III et IV).

I. Détermination de la constante de raideur d'un fil de torsion

On réalise un pendule de torsion à l'aide de deux fils de torsion de constante de raideur k (couple de rappel : $C = -k\theta$). A l'extrémité de ces deux fils de torsion est fixée une tige de longueur $2\ell = 40$ cm parallèlement au sol du laboratoire. Aux deux extrémités de cette tige sont attachées deux masses. On note I le moment d'inertie de l'ensemble {masses+tige} par rapport à l'axe vertical Oz (cf. Fig. 1).

Le système évoluant dans l'air, on supposera que les masses sont chacune soumises à une force de frottements visqueux de la forme : $\overrightarrow{F_f} = -h\vec{v}$ ($h > 0$) où $\vec{v}$ est la vitesse de l'une des masses. On négligera les frottements s'exerçant sur la tige.

On note $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur.

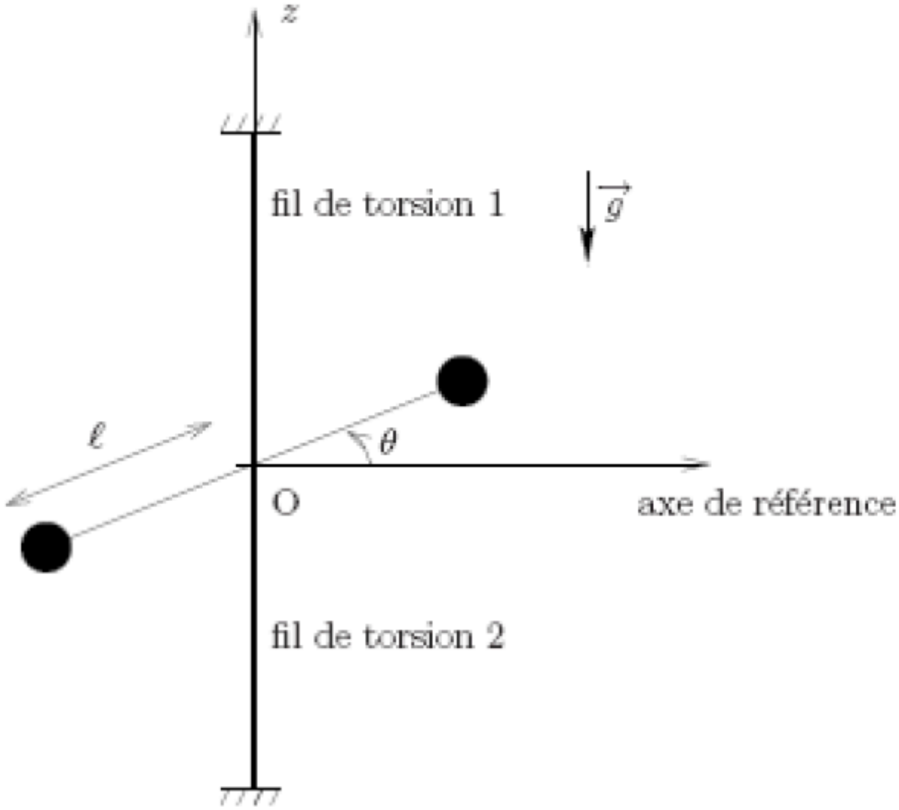

Figure 1.

Equation du mouvement :

I.1. En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que l'équation différentielle du mouvement de l'ensemble {masses+tige} est de la forme :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2}{\tau}\frac{d\theta}{dt}+\omega_0^2\theta=0$$

On exprimera τ et ω_0 en fonction de I, h, ℓ et k.

A l'instant $t=0$, le système est lancé de sa position de repos ($\theta=0$) avec une vitesse initiale angulaire $\left.\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0}=\dot{\theta}_0$. Les frottements sont supposés suffisamment faibles pour que le régime d'oscillation du pendule de torsion soit pseudo-périodique.

I.2. Déduire de l'hypothèse précédente une condition sur h.

I.3. Déterminer alors, dans le cas des petites oscillations, la solution $\theta(t)$ de l'équation différentielle du second ordre vérifiée par l'angle θ.

I.4. Tracer la représentation graphique de $\theta(t)$ en fonction du temps, les courbes enveloppes et la tangente à l'origine de l'enveloppe.

I.5. Que devient l'expression de ω lorsqu'on se trouve en régime de faible amortissement (loin du régime critique, c'est-à-dire $\tau >> T$ où T est la pseudo période du mouvement) ?

I.6. En déduire une expression approchée de la vitesse angulaire $\Omega(t)=\dot{\theta}$ sous la forme :

$$\Omega(t)=Ae^{-t/\tau}\cos(\omega t)$$

où l'on précisera l'expression de A et ω.

Approche expérimentale :

I.11. On appelle décrément logarithmique δ la quantité $\delta=ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+nT)}\right)$, où T est la pseudo-période et t le temps. Exprimer δ en fonction de T, n et τ dans le cas du régime de faible amortissement.

Le pendule oscille de 2 pseudo-périodes pendant 32 s. L'amplitude des oscillations est réduite d'un facteur 3 au bout de 10 oscillations ($I=2{,}6.10^{-5}$ kg.m^2).

I.12. Calculer numériquement à partir de ces valeurs, sans oublier de préciser les unités :
- la pseudo-période T ;
- le décrément logarithmique δ ;
- la constante de temps τ ;
- la pseudo-pulsation et la pulsation propre ;
- la constante de raideur du fil de torsion k.

II. Pendule de torsion de Cavendish

La première détermination de la constante gravitationnelle $\mathcal{G}$ a été réalisée par Henry Cavendish en 1798. L'expérience menée est la suivante : deux petites sphères de platine de masse $m=50$ g sont placées aux extrémités d'une tige horizontale de longueur $2\ell=50$ cm. Cette tige est suspendue à un fil de torsion de même nature que celui étudié précédemment, de constante de torsion $k=2.10^{-6}$ N.m (cf. Fig. 2).

Deux sphères de plomb identiques de masse $M=30$ kg positionnées dans le plan horizontal de la tige sont placées à une distance $d=15$ cm du centre de chaque petite sphère de platine. Le pendule est alors dévié d'un angle α.

Lorsqu'on déplace les sphères de plomb dans une nouvelle position symétrique de la précédente et indiquée en pointillés sur la figure 2, le pendule tourne alors d'un angle $\theta=2\alpha$.

On négligera l'action de chaque grosse sphère sur la petite sphère la plus éloignée.

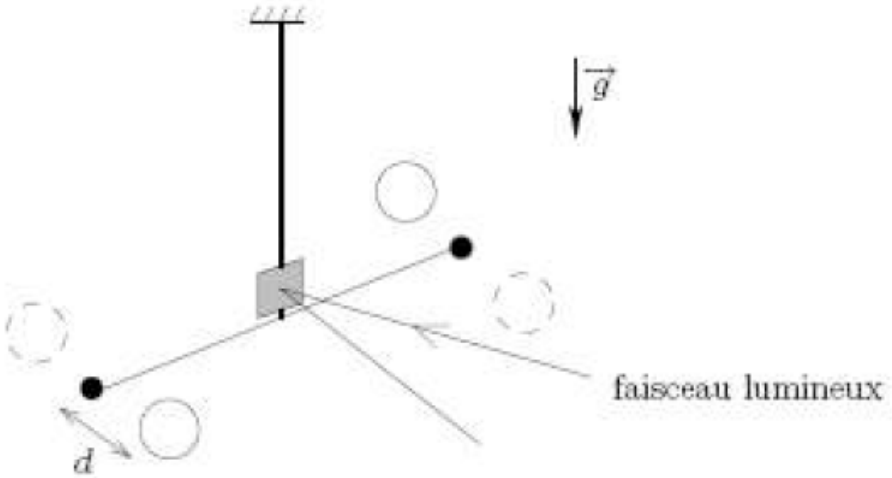

Figure 2.

II.1. Exprimer la force gravitationnelle qui s'exerce sur chaque petite sphère. En déduire la déviation θ du pendule en fonction de $\mathcal{G}$, M , m , ℓ , k et d .

L'angle dont tourne le pendule lorsque l'on permute les positions des grosses sphères est mesuré à l'aide d'un miroir fixé sur l'axe de rotation du pendule. La déviation du faisceau lumineux est mesurée sur une échelle placée à une distance $b = 4\,\text{m}$ du pendule.

II.2. On mesure une déviation sur l'échelle de $a = 9\,\text{mm}$. Déduire de cette mesure la valeur de $\mathcal{G}$. Comparer à la valeur donnée en préambule.

Question annexe : Expliquer comment, connaissant la constante de gravitation universelle G, on peu facilement déterminer la masse de la Terre M_T (et donc sa densité, que vous calculerez).