Feuille d'exercices n°19 :
Mouvements de rotation et théorème du moment cinétique

Exercice 1 : Chute d'un arbre :

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. A t = 0, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5°$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie de l'arbre par rapport à son extrémité : I = $\frac{1}{3}mL^2$.

1) Etablir l'équation du mouvement de chute de l'arbre.

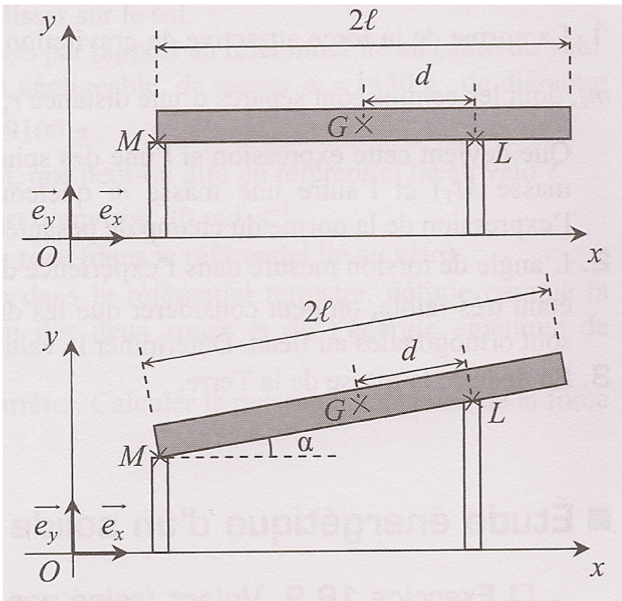
2) Montrer que lorsque l'angle fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}\left(\cos(\theta_0) - \cos(\theta)\right)}$$

3) Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On prendra g = 10 m.s⁻². On donne, pour $\theta_0 = 5°$: $\int_{\theta_0}^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta_0) - \cos(\theta)}} = 5{,}1$.

Exercice 2 : Portage d'une poutre :

Michel et Lucien portent ensemble une poutre, de longueur $2l = 4{,}0m$ et de masse m = 30 kg. Michel est à une extrémité M de la poutre, Lucien étant au point L à une distance d = 1,4 m du milieu de la poutre. Les deux forces qu'ils exercent sur la poutre sont verticales.



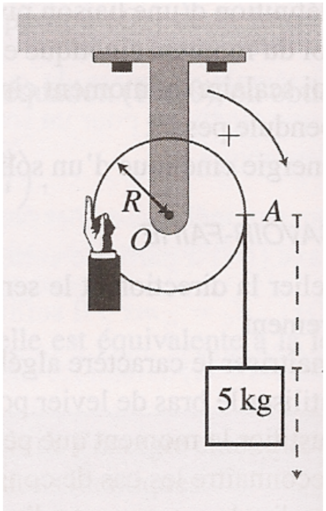
1) On suppose tout d'abord que Michel et Lucien ont la même taille, la poutre étant donc maintenue horizontale. Déterminer les normes des forces $\overrightarrow{F_M}$ et $\overrightarrow{F_L}$ exercées par chacun des deux.

2) En fait Michel est plus petit que Lucien, la poutre fait donc un angle α avec l'horizontale. Les forces restent toujours verticales. Déterminer à nouveau les normes des deux forces et commenter.

Exercice 3 : Etude d'une poulie :

Une masse m = 5,0 kg est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse m_p = 1,0 kg et de rayon R = 10 cm en liaison pivot idéale autour de son axe avec un support fixe (voir figure).

On prendra g = 10 m.s⁻². Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2} m_p R^2$.



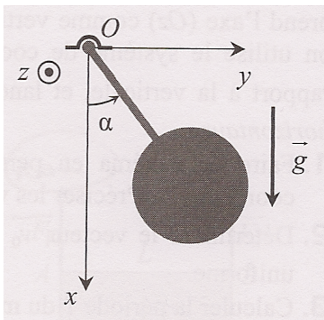
1) Aspect cinématique : on suppose que la poulie est en rotation autour de son axe fixe (Oz) à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$. Quelle est alors la vitesse de la masse m ?

2) Aspect statique : cette même poulie est retenue par un opérateur. Quelle force l'opérateur doit-il exercer pour l'empêcher de tourner ?

3) Aspect dynamique : avec le même dispositif, l'opérateur lâche la poulie. Déterminer l'accélération angulaire de la poulie, l'accélération linéaire de la masse m et la tension de la corde.

Exercice 4 : Pendule pesant :

On considère le pendule ci-dessous, capable d'osciller librement autour de l'axe (Oz) horizontal grâce à une liaison pivot parfaite. Il est constitué d'une barre homogène, de section constante et de masse m, à l'extrémité de laquelle on a soudé un disque homogène de masse 2m et de centre C. L'ensemble obtenu constitue un solide rigide. La distance OG entre le point O et le centre de masse du système est notée b.



Le moment d'inertie du système par rapport à l'axe (Oz) est $J_z = k\,m\,b^2$, k étant un réel positif.

On écarte le pendule d'un angle α_0 par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale à la date t = 0. On étudie son mouvement ultérieur en observant l'angle α que forme la direction de la barre avec l'axe vertical descendant (Ox).

1) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit α.

2) Une mesure expérimentale permet de déterminer la période T des petites oscillations. Déterminer le coefficient k en fonction de T, g et b.

Exercice 5 : Volant freiné par un couple constant :

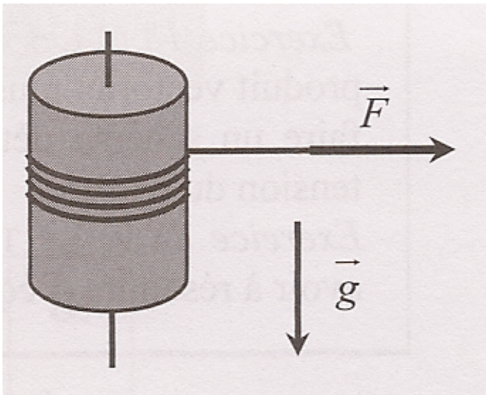
Un volant tourne autour d'un axe horizontal par rapport auquel son moment d'inertie est J. Son barycentre est sur l'axe. On schématise le frottement solide par un couple opposé au mouvement, dont le moment vaut en valeur absolue : $|M| = \alpha J$ (α étant un paramètre positif supposé constant).

1) On lance le volant avec une vitesse angulaire initiale ω_0 : on constate qu'il s'arrête après N tours. Exprimer α en fonction de J, N et ω_0.

2) Comment pourrait-on vérifier expérimentalement que α est bien constant au cours du mouvement et indépendant de la vitesse angulaire ω ?

Exercice 6 : Toupie :

Bob joue avec une toupie qu'il fait tourner à l'aide d'un fil inextensible enroulé sur le corps de la toupie. Celle-ci est assimilable à un cylindre de masse m et de rayon R. Une pointe métallique de masse négligeable permet à la toupie de tenir sur le sol horizontal. Pendant tout son mouvement, la toupie reste verticale. Bob enroule le fil (4 tours) puis tire sur le fil avec une force de norme F constante.
On note ω la vitesse angulaire instantanée de la toupie.
Bob commence à exercer la force à la date t = 0, la toupie étant initialement immobile.



1) Exprimer la puissance instantanée de la force $\vec{F}$ en fonction de F, R et ω.

2) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique et en déduire l'accélération angulaire de la toupie.

3) Quelle est la vitesse angulaire de la toupie quand tout le fil a été déroulé (4 tours) ?

Exercice 7 : Pendule pesant simple : mouvement horizontal :

On constitue un pendule avec un fil idéal de longueur l, dont l'une des extrémités est fixée au point O (origine du repère). A l'autre extrémité se trouve un point matériel M de masse m. On prend l'axe (Oz) comme verticale ascendante (dans le référentiel terrestre supposé galiléen), et on utilise le système de coordonnées cylindriques.
Le pendule est écarté d'un angle α par rapport à la verticale et lancé avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ pour que le point M décrive des cercles horizontaux.

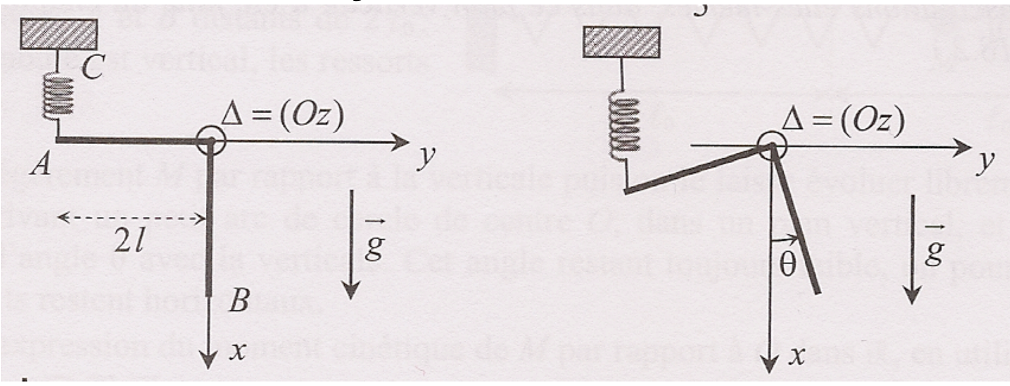
1) faire un schéma en perspective, en faisant apparaître la trajectoire de M et ses trois coordonnées. Préciser les valeurs de r et z.

2) Déterminer le vecteur $\overrightarrow{v_0}$ par application du théorème du moment cinétique et montrer que le mouvement de M est uniforme.

3) Calculer la période T du mouvement. Quelle est la valeur approchée de T si α est faible ?

Exercice 8 : Oscillations d'un solide soumis à une force élastique :

Un solide (S) est constitué de deux tiges homogènes rigidement liées l'une à l'autre, AO et OB, faisant entre elles un angle droit. Chaque tige a pour masse m et pour longueur $2l$. (S) peut tourner autour d'un axe horizontal (Oz) passant par O.
La liaison en O est une liaison pivot parfaite. Un ressort de masse négligeable, de constante de raideur k, est accroché à l'une de ses extrémités en A, l'autre extrémité C étant maintenue fixe. Lorsque l'ensemble est en équilibre dans le champ de pesanteur supposé vertical et uniforme, AO est horizontale et OB verticale.
On donne le moment d'inertie d'une tige de masse m et de longueur $2l$, par rapport à un axe perpendiculaire à la tige et qui passe par une extrémité : $I = \frac{4}{3}ml^2$.



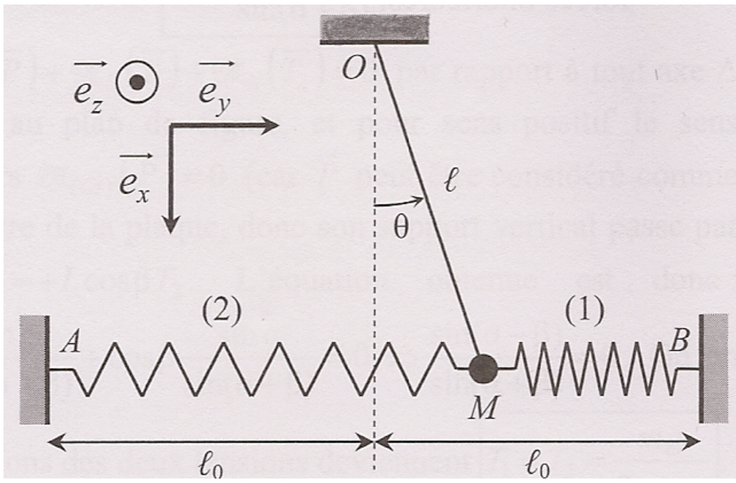
1) a) Que vaut le moment d'inertie J de l'ensemble des deux tiges par rapport à l'axe (Oz) ?
b) Déterminer l'allongement du ressort lorsque le système est à l'équilibre.

2) On se propose d'étudier les oscillations autour de la position d'équilibre. L'angle θ restant petit, on pourra considérer que la force exercée par le ressort sur le solide reste verticale pendant tout le mouvement.
a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par θ. Montrer que le mouvement est sinusoïdal et donner l'expression de la période en fonction de m, g, k et l.
b) Application numérique : calculer la période sachant que m = 100 g, l = 10 cm, g = 9,8 m.s^{-2} et k = 12 N.m^{-1}.

Exercice 9 : Pendule simple relié à des ressorts :

Un pendule simple est constitué d'un fil rigide de masse négligeable et de longueur l, à l'extrémité duquel est fixé un point matériel M de masse m. Il est accroché au point O, fixe par rapport au référentiel R du laboratoire. M est également attaché à deux ressorts (1) et (2) identiques, de raideur k et de longueur à vide l_0, fixés entre deux points A et B distants de $2l_0$: lorsque le pendule est vertical, les ressorts sont au repos.

On déplace légèrement M par rapport à la verticale puis on le laisse évoluer librement. Il oscille alors en décrivant un petit arc de cercle de centre O, dans un plan vertical, et on repère sa position par l'angle θ avec la verticale. Cet angle restant toujours faible, on pourra considérer que les ressorts restent horizontaux.



1) Donner l'expression du moment cinétique de M par rapport à O dans R, en utilisant une base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ d'origine O.

2) Calculer les moments des forces s'exerçant sur M, en fonction de la seule variable θ.

3) Par application du théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ et en déduire la pulsation des petites oscillations.

Exercice 10 : Calculs de moments d'inertie (Hors Programme) :

1) Boule : On considère une boule pleine de rayon R et de masse M (uniformément répartie).

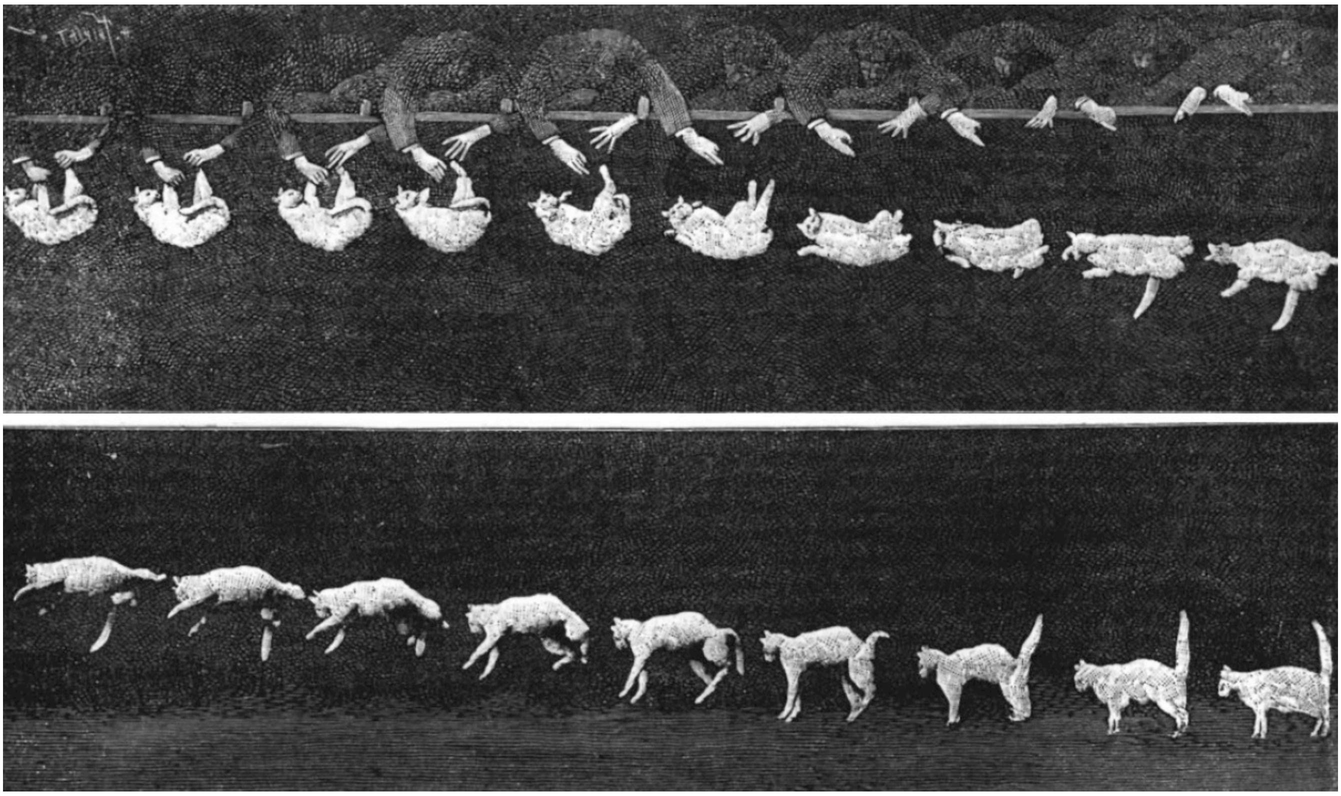
a) Retrouver par une intégrale l'expression du volume de la boule. En déduire l'expression de sa masse volumique ρ.

b) Calculer le moment d'inertie J de la boule par rapport à un axe passant par son centre O.

2) Cylindre : On considère un cylindre de rayon R et de hauteur h. On note M sa masse totale (qui est uniformément répartie). Calculez le moment d'inertie J du cylindre par rapport à son axe.

Exercice 11 : Nos amis les chats :

A l'aide de la chronophotographie suivante, réalisée en 1894 par Etienne-Jules Marey, expliquez comment les chats arrivent à toujours retomber sur leur pates (même quand on les lâche à l'envers), et ce tout en respectant les lois de base de la physique.



Exercice 12 : À bicyclette…

Un petit enfant roule sur son vélo, à vitesse constante, en ligne droite, sur une route horizontale, à la vitesse v_0 = 15 km/h. Les roues du vélo roulent sans glisser sur le sol.
On étudie tout d'abord la rotation d'une des roues par rapport au référentiel lié au cadre du vélo.
La roue est assimilable à un cerceau de section négligeable, de masse m = 1,5 kg, de diamètre D = 67 cm. La masse totale du système (enfant+ vélo) est M = 30 kg.

1) Si le référentiel terrestre est supposé galiléen, que peut-on dire du référentiel lié au vélo ?
2) Quelle est la vitesse angulaire ω_0 de rotation de la roue ?
3) Calculer l'énergie cinétique de rotation d'une roue (dans le référentiel lié au vélo).
4) Calculer l'énergie cinétique totale du système (vélo+enfant) dans le référentiel terrestre, définie comme la somme des énergies cinétiques de rotation des deux roues et de l'énergie cinétique de translation du système entier.
5) L'enfant freine et met une durée Δt = 5,0 s à s'arrêter. Calculer la puissance moyenne de la force de freinage.

Exercice 13 : Funambulisme :

En 1974, le français Philippe Petit marche sur une corde entre les deux tours jumelles de New York (sans avoir l'accord de la mairie, et surtout sans être attaché ou avoir la moindre protection).
Pour s'aider, il utilise un « balancier » qu'il a lui même confectionné : il s'agit d'une tige de 8 m de long, qui pèse 25 kg.

Expliquer le rôle du balancier (plusieurs effets entrent en jeu).