# Correction d'exercices de la feuille 11 : régime sinusoïdal forcé

## Exercice 5 :

1) On a affaire à une forme de circuit très classique appelée "pont" (que l'on a déjà rencontré, au passage, dans un DM et dans un DS : le pont de Wheatstone, utilisé notament pour la mesure précise de résistances).

La résolution est très simple si on s'y prend bien : on remarque déjà que, gràce à la loi des mailles, on peut dire que :

$$\underline{V}_s = \underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD}$$

Ensuite, comme le condensateur et la résistance r sont en série (puisque aucun courant ne circule entre A et B) et que la tension totale aux bornes de l'ensemble de ces deux dipôles est $\underline{V}_e$, on peut écrire, grâce à la formule du diviseur de tension, que :

$$\underline{U}_{AD} = \underline{V}_e \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + r} = \underline{V}_e \frac{1}{1 + jrC\omega}$$

En faisant de même avec les deux résistances $R$ qui sont également en série, on obtient :

$$\underline{U}_{BD} = \underline{V}_e \frac{R}{R+R} = \frac{\underline{V}_e}{2}$$

On en déduit que :

$$\underline{V}_s = \underline{U}_{AD} - \underline{U}_{BD} = \underline{V}_e \left( \frac{1}{1+jrC\omega} - \frac{1}{2} \right) = \underline{V}_e \left( \frac{1-jrC\omega}{2(1+jrC\omega}) \right)$$

D'où la fonction de transfert :

$$\underline{T_1}(j\omega) = \frac{1}{2} \left( \frac{1-jrC\omega}{1+jrC\omega} \right)$$

2) On a $\varphi_1 = arg(\underline{T_1(j\omega)} = arg(1-jrC\omega) - arg(1+jrC\omega) = \arctan(-rC\omega) - \arctan(rC\omega) = -2\arctan(rC\omega)$.

3) $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ implique que $\arctan(rC\omega) = \frac{\pi}{4}$, soit $rC\omega = \tan(\pi/4) = 1$, donc $r = \frac{1}{C\omega} = 1000\Omega$

## Exercice 10 :

1) a) Il s'agit d'un circuit LC sans source (l'énoncé précise que $e(t) = 0$ dans cette première partie). La loi des mailles permet d'aboutir à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Il s'agit de l'équation d'un oscillateur harmonique, les solutions sont donc de la forme :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, on a que $u(0^+) = E$, ce qui impose $A = E$, et par continuité du courant dans la bobine, on obtient de $\frac{du}{dt}(0^+) = 0$, ce qui impose que $B = 0$.

On obtient donc :

$$u(t) = E\cos(\omega_0 t)$$

puis

$$i(t) = C\frac{du}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

b) On a :

$$E_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}LC^2E^2\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t) = CE^2\sin^2(\omega_0 t)$$

et :

$$E_c = \frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}CE^2\cos^2(\omega_0 t)$$

D'où $E_{tot} = \frac{1}{2}CE^2(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) = \frac{1}{2}CE^2$. Ainsi, l'énergie électrique totale du circuit se conserve, ce qui est normal car il n'y a pas de résistance, donc il ne peut pas y avoir de dissipation d'énergie par effet Joule.

Pour les courbes représentatives, reprenez votre cours de début d'année sur l'oscillateur harmonique : il s'agit des mêmes courbes que celles de $E_c$, $E_p$ et $E_m$ pour un système masse+ressort sans frottements.

c) Analyse qualitétive de ce qui se passe dans le circuit :

le condensateur, initialement chargé, se décharge quand on le connecte à la bobine. Quand le condensateur est déchargé, le courant devrait brusquement s'arrêter mais la bobine s'oppose à la variation de courant et "force" le courant à continuer, ce qui a pour effet de recharger le condensateur en inverse de son état initial. Il se redécharge alors, et ainsi de suite.

2) En régime sinusoïdal forcé, on sait que $u(t)$ sera de la forme :

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

Il faut donc déterminer $U$ et $\varphi$. Pour cela, on utilise la représentation complexe. Par un diviseur de tension, on obtient que l'amplitude complexe $\underline{U}$ s'écrit :

$$\underline{U} = E\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{JC\omega} + jL\omega} = \frac{E}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

ainsi, $\varphi = 0$ si $\omega < \omega_0$ et $\varphi = \pi$ si $\omega > \omega_0$, et l'amplitude réelle de $u(t)$ vaut :

$$U = \frac{E}{\left|1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2\right|}$$

b) On constate que la fonction $U(\omega)$ tend vers $E$ lorsque $\omega \to 0$ et tend vers 0 lorsque $\omega \to +\infty$. De plus, $U(\omega)$ tend vers $+\infty$ lorsque $\omega \to \omega_0$. On obtient alors la courbe suivante :

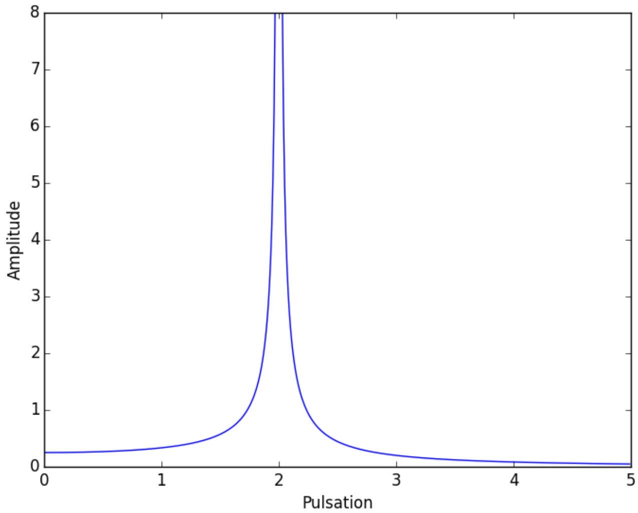


FIGURE 1 – Allure de la fonction $U(\omega)$. On a pris $\omega_0 = 2rad/s$.

On constate un phénomène de résonance "extrême" puisque l'amplitude diverge lorsque $\omega$ tend vers la pulsation propre du circuit $\omega_0$ : c'est normal : comme on a négligé les phénomènes dissipatifs (effet Joule), il n'y a rien pour limiter la taille du pic de résonance (en d'autres termes, le facteur de qualité du circuit est infini).