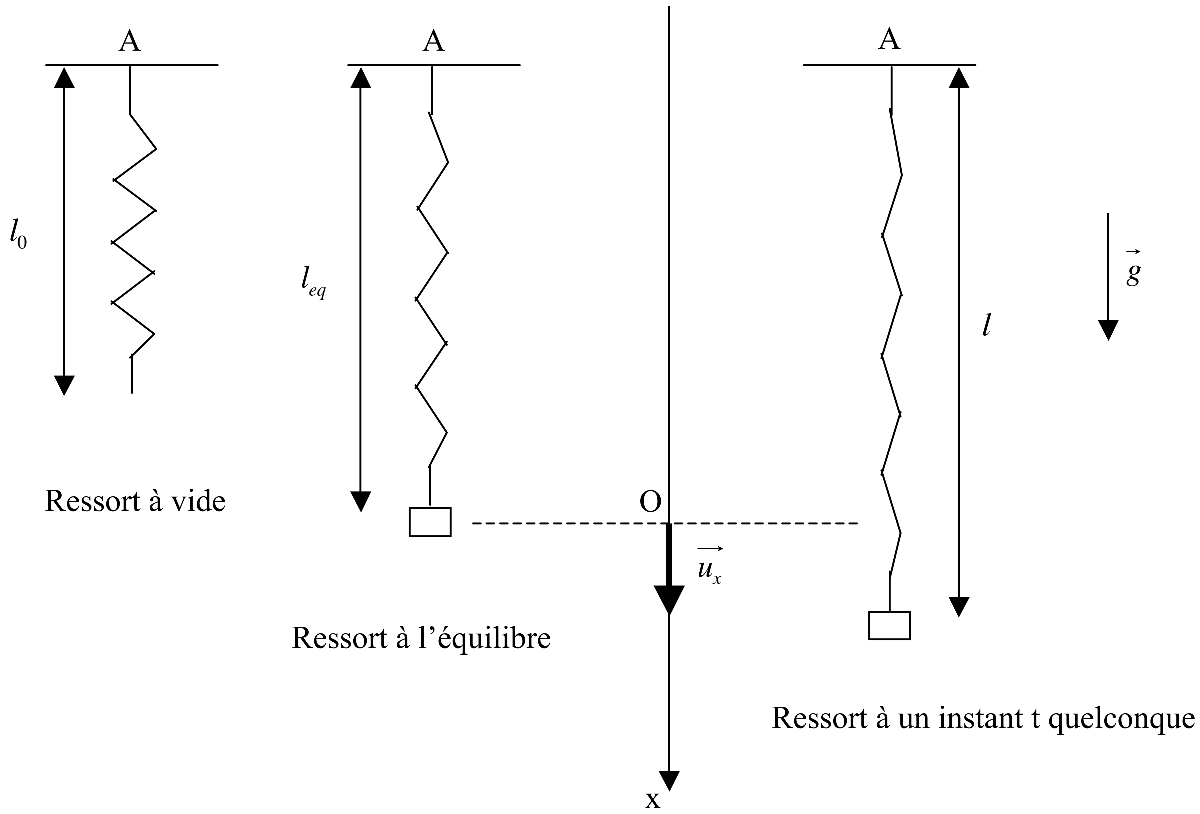
Feuille d'exercices n°10 :
Oscillateurs amortis

Exercice 1 : Oscillateur à ressort vertical, décrément logarithmique :



Un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 est accroché au plafond en un point fixe A. On accroche une masse m à l'autre extrémité du ressort.
Lorsque la masse oscille, elle est soumise à une force de frottements due à l'air : $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ où λ s'appelle le « coefficient de frottements ».

1) Calculer la longueur du ressort à l'équilibre (quand la masse est accrochée), notée l_{eq}.

2) On pose $x = l - l_{eq}$ (c'est à dire que l'on prend l'origine du repère au niveau de la position d'équilibre). Etablir l'équation différentielle satisfaite par x(t) et la mettre sous la forme canonique (i.e. standard) : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où vous donnerez les expressions de ω_0 et de Q en fonction de k, m et λ.

3) A quelle condition sur k, m et λ la masse pourra-t-elle osciller (« pseudo-oscillations ») ?

4) Si la condition de la question 3 est vérifiée, résoudre l'équation différentielle sachant que la masse est initialement dans sa position d'équilibre (soit x(0) = 0) et qu'on lui communique une vitesse initiale v_0 vers le bas (soit $\dot{x}(0) = v_0$).

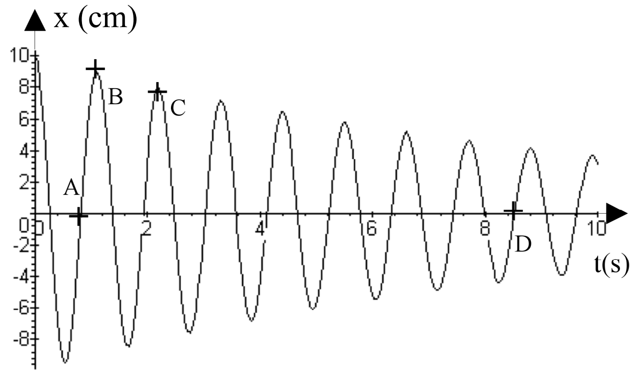
5) Exprimer la « pseudo-période » T des oscillations en fonction de ω_0 et Q.

6) Quand un système décrit des oscillations amorties, on définit le « décrément logarithmique » δ par :

$$\delta = \ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

où t est un instant quelconque et T est la « pseudo-période ».
Exprimer δ en fonction de ω_0 et Q.

7) En enregistrant la position de la masse au cours du temps, on a obtenu le graphe expérimental suivant :



pour lequel on précise les coordonnées de quatre points particuliers :

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
x (cm)	0	8,95	8,02	0

En déduire la pseudo-période T et le décrément logarithmique δ.

8) On a pesé la masse, qui vaut m = 500 g.
En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort et du coefficient de frottements λ (on pourra considérer que comme Q est grand, la pseudo-période est à peu près égale à la période propre $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$).

<u>Exercice 2 : Nombre de pseudo-oscillations :</u>

Un oscillateur amorti est régi par l'équation différentielle : $\ddot{u} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$ où ω_0 est la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Ce dernier est supposé tel que Q > 0,5.

1) Résoudre l'équation différentielle et en déduire la période T des pseudo-oscillations.

2) Donner la durée τ du régime transitoire correspondant, en prenant le critère de 5%.

3) En déduire le nombre N de pseudo-oscillations ayant lieu pendant le régime transitoire.

4) Simplifier ce résultat pour Q >> 1.

<u>Exercice 3 : Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle :</u>

Soit un circuit constitué de l'association en série d'une source idéale de tension E, d'une résistance R, d'un interrupteur K et de l'association en parallèle d'une résistance r, d'une inductance L et d'une capacité C. Initialement l'interrupteur est ouvert, la capacité est déchargée et les courants sont tous nuls. On ferme l'interrupteur K à l'instant t = 0. On notera i l'intensité du courant dans R, i_1 dans L, i_2 dans C et i_3 dans r ainsi que u la tension aux bornes de r (ou de C, ou de L, puisque les trois sont en parallèle).

1) Déterminer, en les justifiant, les valeurs de u, i, i_1, i_2 et i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur K.

2) Même question lorsque le régime permanent est complètement établi.

3) Etablir l'équation différentielle satisfaite par i_3 pour t > 0 et la mettre sous la forme $\dfrac{d^2 i_3}{dt^2} + 2\lambda\omega_0 \dfrac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$, en donnant les expressions de ω_0 et λ en fonction de r, R, L et C.

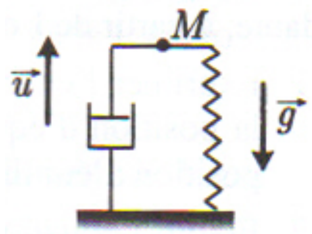
4) Etablir la condition que doivent vérifier r, R, L et C pour observer un régime pseudo-périodique.

5) Déterminer l'expression de i_3 en fonction du temps. On justifiera la détermination des constantes.

6) Exprimer la pseudo-période T en fonction de r, R, L et C.

7) Déterminer le temps nécessaire pour que le régime permanent soit établi dans le circuit avec une précision d'un millième.

Exercice 4 : Suspension de véhicule :



On considère le dispositif ci-dessus (qui modélise la suspension d'une voiture), dans lequel un ressort exerce une force de rappel élastique et le piston une force d'amortissement.
A l'extrémité mobile du dispositif est fixé un point matériel M de masse m = 255 kg.

La longueur à vide du ressort est l_o = 1 m, on note l sa longueur a un instant quelconque et sa constante de raideur vaut k = 12,5 kN/m.

La force d'amortissement est de type visqueux : $\vec{F} = -\beta\vec{v}$, où β est un coefficient constant, positif et égal à 15,3 kg/s et où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse de M.

A la date t = 0, M est à sa position d'équilibre et on lui communique une vitesse $\vec{v_0} = v_0\vec{u}$ avec v_o = 0,5 m/s.

1) Calculer la longueur l_{eq} du ressort quand M est à l'équilibre. Par la suite on posera x = l - l_{eq}.

2) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par x(t).

3) Compte tenu des valeurs numériques, montrer que l'on peut mettre x(t) sous la forme :

$$x(t) = e^{-\lambda t}(a\cos(\Omega t) + b\sin(\Omega t))$$

et exprimer a, b, Ω et λ en fonction des données puis calculer leurs valeurs numériques.

4) Quelle est la valeur absolue maximale A_{max} de l'amplitude A ?
Au bout de combien de temps peut on considérer que la position d'équilibre est atteinte (on considèrera qu'elle est atteinte lorsque A est toujours inférieur à $10^{-3} A_{max}$)?

Exercice 5 : Prévision de la position à plusieurs instants :

On considère une masse m accrochée à un ressort horizontal de raideur k (l'ensemble est placé sur une table à coussin d'air afin d'éliminer les frottements solides). Le mouvement de la masse est amorti à cause des frottements fluides de l'air sur la masse : force de frottement de type $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$.

L'équation différentielle du mouvement de la masse est (en notant x(t) l'écart de la masse à sa position d'équilibre) :

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

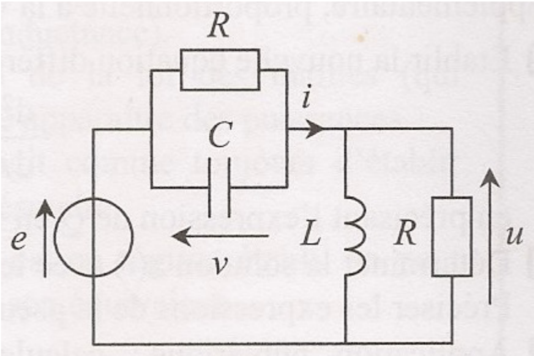
avec $\omega_0 = \frac{k}{m} = 1s^{-1}$ et $\beta = \frac{\lambda}{2m} = 0{,}2s^{-1}$.

La masse est lâchée, sans vitesse initiale, d'une position initiale x_o = 20 cm.

a) Calculer la position x de la masse à t = 1s, t = 2s, t = 40s.

b) Au bout de combien de temps le mouvement de la masse est-il toujours compris dans un intervalle de 1 cm autour de la position d'équilibre ?

Exercice 6 :



Pour t < 0 : e = 0, v = 0, u = 0. Pour t > 0, e = E.

1) Déterminer les équations différentielles vérifiées par u(t) et v(t) et donner les expressions des grandeurs ω_0 et Q associées au système.

2) Préciser les conditions initiales pour u(t), v(t) et leurs dérivées.

On se place dans le cas Q >> 1.

3) Déterminer l'expression de la tension v(t) en fonction de ω_0, Q et E. En déduire une valeur approchée de la tension maximale atteinte par v(t).

Exercice 7 : Circuit LC :

On considère un circuit constitué de l'association en série d'une source idéale continue de fém E, d'un interrupteur K (initialement ouvert), d'une bobine idéale d'inductance L, et d'un condensateur de capacité C (initialement déchargé).

À t = 0, on ferme l'interrupteur.

1) Donner l'expression de u(t) (tension aux bornes du condensateur) et de i(t) (intensité du courant dans le circuit) pour t > 0. On pourra poser $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$.

2) Vérifier qu'il y a bien conservation de l'énergie.