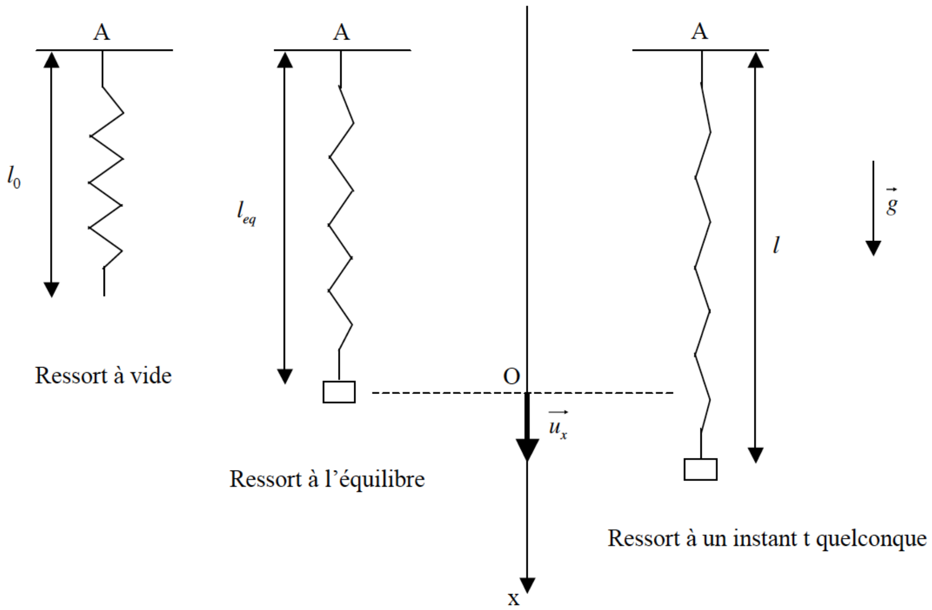
Correction d'exercices de la feuille 1 : oscillateur harmonique

Exercice 1



1) À l'équilibre, la somme des forces subies par la masse est nulle. On a donc :

$$\vec{P} + \vec{F_R} = \vec{0}$$

soit :

$$mg\vec{u_x} - k(l_{eq} - l_0)\vec{u_x} = \vec{0}$$

On en déduit, après projection sur $\vec{u_x}$ et quelques calculs, que :

$$l_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k} = 79cm$$

2) On applique la deuxième loi de Newton à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_R}$$

soit :

$$m\ddot{x}\vec{u_x} = mg\vec{u_x} - k(l - l_0)\vec{u_x}$$

Rem : attention de bien mettre $l - l_0$ dans la force de rappel (comme toujours), et pas $l - l_{eq}$ comme les élèves sont parfois tentés de le faire !

On a donc, après projection sur $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = mg - k(l - l_0)$$

Or, l'énoncé veut que l'on pose $x = l - l_{eq}$, donc $l = x + l_{eq}$. Ainsi, $l - l_0 = x + l_{eq} - l_0 = x + \frac{mg}{k}$ d'après la question précédente.

On obtient donc :

$$m\ddot{x} = mg - kx - mg = -kx$$

On retrouve donc l'équation différentielle "habituelle" d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

4) On a vu en cours que la solution générale de cette équation différentielle peut s'écrire :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

où A et B doivent être déterminées à partir des conditions initiales (ici $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$).

La première condition initale implique que :

$$A\cos(0) + B\sin(0) = x_0$$

donc $A = x_0$.

De plus, $\dot{x}(t) = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$,

donc la deuxième condition initiale implique que :

$$-A\omega_0\sin(0) + B\omega_0\cos(0) = 0$$

soit $B = 0$ puisque ω_0 est non nul.

Ainsi $x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)$.

On sait que la période de cette fonction est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. L'application numérique donne $T_0 \simeq 1,4s$.

4) Il suffit de calculer $x(t_0 = 60s)$. On obtient avec la calculatrice[1] $x(t_0) = -5,5cm$. Donc $l(t_0) = x(t_0) + l_{eq} = 73,5cm$.

5) Exprimons l'énergie mécanique du système masse + ressort à un instant t quelconque. Bien sûr nous devons pour cela tenir compte de deux énergies potentielles : l'énergie potentielle élastique (liée au ressort) et l'énergie potentielle de pesanteur.

On a :

$$\begin{aligned}
E_m &= E_c + E_{pp} + E_{pe} && (1)\\
&= \frac{1}{2}mv^2 + mgh + \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 && (2)\\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx + \frac{1}{2}k(x + \frac{mg}{k})^2 && (3)\\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{(mg)^2}{2k} && (4)
\end{aligned}$$

1. Attention à ce qu'elle soit bien en mode RADIAN

en prenant pour origine de l'énergie potentielle de pesanteur la position d'équilibre (attention, notre axe x pointe vers le bas donc $h = -x$) et en utilisant que $l = x + l_{eq} = x + l_0 + mg/k$).

Il suffit ensuite d'injecter la fonction $x(t)$ trouvée à la question 3, soit : $x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$ et on obtient :

$$E_m = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{(mg)^2}{2k} = \frac{1}{2} k x_0^2 + \frac{(mg)^2}{2k} = cte \tag{5}$$

en utilisant que $\omega_0^2 = k/m$ et que $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$ pour tout réel y.

On retrouve bien la conservation de l'énergie mécanique (en l'absence de frottements).

Exercice 3

1) Par lecture graphique directe, on voit que l'amplitude vaut $A = 1,4cm$ et la période $T_0 \simeq 3,5s$, d'où la pulsation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \simeq 1,8rad/s$.

On sait donc que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$ où A et ω_0 sont connus. Pour déterminer φ on peut utiliser la valeur en $t = 0$: $x(0) = -0,6cm = A\cos(\varphi)$. On en déduit que $\varphi = \arccos(-0,6/1,4) = 2rad = 115\,\deg$.

2) On sait que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ donc $k = m\omega_0^2 = 0,16N/m$.

Exercice 5

On sait que la période des oscillations d'un pendule élastique est $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, donc la fréquence est $f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$. Ainsi, si la masse du système est doublée alors que k est maintenue constante, la fréquence sera divisée par $\sqrt{2}$.

On en déduit la fréquence des oscillations quand le bus est plein : $f' = \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0,71Hz$.