Correction du DS8 de Sciences Physiques

Exercice 1 : L'expérience de Cavendish

A - Détermination de la constante de raideur d'un fil de torsion

1) On étudie le système (tige + masses) dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On va appliquer le théorème du moment cinétique à ce système, par rapport à l'axe (Oz), qui est ici l'axe de rotation.

Calculons les moments par rapport à (Oz) des forces extérieures appliquées au système :

— Poids : $M_z(\vec{P}) = 0$ car le poids s'applique en O (centre de gravité du système), et, de toute façon, le poids étant colinéaire à (Oz), son moment par rapport à cet axe est forcément nul

— La tension des fils : $M_z(\vec{T}) = 0$ car $\vec{T}$ s'applique en O (et est également colinéaire à (Oz))

— les forces de torsion exercées par les fils, de moment total : $M = -2k\theta$ (puisque chaque fil exerce un couple de moment $-k\theta$

— les forces de frottements de l'air sur les deux masses, chacune de moment $M_z(\vec{F_f}) = (\vec{OM} \wedge (-h\vec{v})).\vec{u_z} = (l\vec{u_r} \wedge (-hl\dot{\theta}\vec{u_\theta})).\vec{u_z} = -hl^2\dot{\theta}$

Ainsi, le théorème du moment cinétique donne :

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_z(\vec{F}) = -2k\theta - 2hl^2\dot{\theta}$$

avec $L_z = I\dot{\theta}$

On obtient donc l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2hl^2}{I}\frac{d\theta}{dt} + \frac{2k}{I}\theta = 0$$

ce qui est bien l'équation donnée dans l'énoncé, en posant $\tau = \frac{I}{hl^2}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{I}}$.

2) L'équation caractéristique de cette équation du second degré est :

$$r^2 + \frac{2}{\tau}r + \omega_0^2 = 0$$

dont le discriminant vaut :

$$\Delta = 4(\frac{1}{\tau^2} - \omega_0^2)$$

On sait que l'on sera dans le régime pseudo-périodique si les racines de l'équation caractéristique sont complexes, c'est à dire si $\Delta < 0$, soit $\omega_0 > \frac{1}{\tau}$, ou encore :

$$h < \frac{\sqrt{2kI}}{l^2}$$

3) Sans ce cas, les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$r_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$$

Si on note $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}}$ la partie imaginaire de ces racines, la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

$$\theta(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$

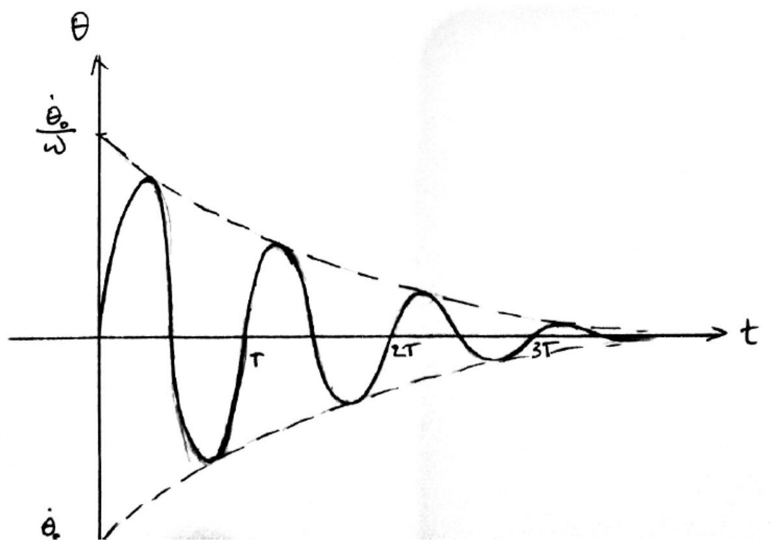
Déterminons les constantes A et B à partir des conditions initiales. On a : $\theta(0) = 0$, ce qui implique que $A = 0$ et donc que $\theta(t) = Be^{-t/\tau}\sin(\omega t)$, d'où :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t) + \omega Be^{-t/\tau}\cos(\omega t)$$

d'où : $\dot{\theta}(0) = B\omega$ et donc $B = \frac{\dot{\theta}_0)}{\omega}$
Ainsi la solution est :

$$\theta(t) = \frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-t/\tau}\sin(\omega t)$$

D'où la représentation graphique :



4) La pseudo-pulsation vaut $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{\tau^2}} \simeq \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{I}}$ dans la mesure où $\tau >> T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

5) En dérivant l'expression de la question 3, on trouve :

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{\dot{\theta}_0}{\omega\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t) + \dot{\theta}_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega t)$$

Or, dans l'hypothèse d'oscillations peu amorties, $\omega\tau >> 1$ et donc le premier terme de la somme précédente est négligeable, ce qui conduit à :

$$\dot{\theta}(t) = \dot{\theta}_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega t)$$

avec $\omega \simeq \sqrt{\frac{2k}{I}}$.

6) Pour un solide en rotation autour d'un axe à la vitesse angulaire Ω, $E_c = \frac{1}{2}I\Omega^2$.

7) Pour le couple de torsion $M = -k\theta$ donc $\frac{dE_p}{d\theta} = k\theta$, donc $E_p(\theta) = \frac{1}{2}k\theta^2$ (on note l'analogie avec l'énergie potentielle élastique $E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$.

8) On a donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}I\Omega^2 + 2 \times \frac{1}{2}k\theta^2$$

(le 2 vient du fait qu'il y a deux fils, et on ne tient pas compte de l'énergie potentielle de pesanteur car elle reste constante puisque le système oscille dans un plan horizontal).
Ainsi :

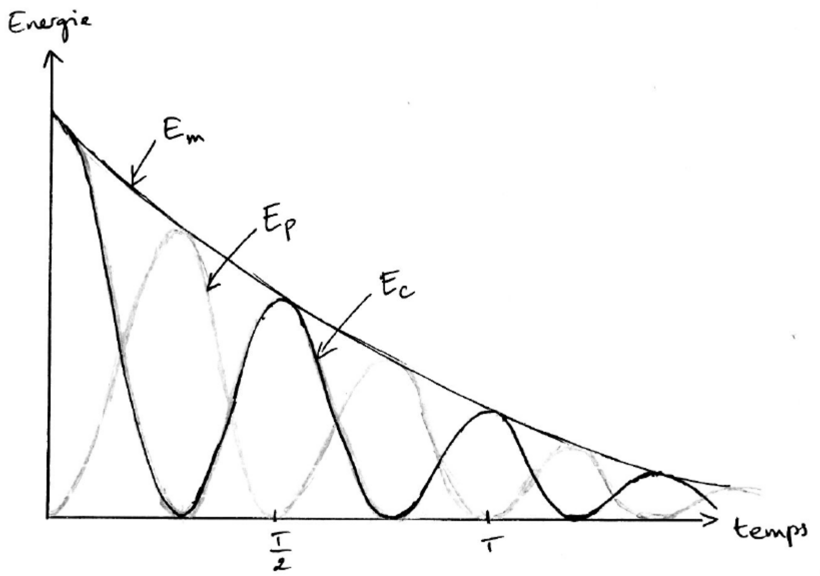
$$E_m(t) = \frac{1}{2}I\dot{\theta_0}^2 e^{-2t/\tau}\cos^2(\omega t) + k\frac{\dot{\theta_0}^2}{\omega^2}e^{-2t/\tau}\sin^2(\omega t)$$

Sachant que $\omega \simeq \sqrt{\frac{2k}{\text{ffl}I}}$ et que $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, on en déduit que :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}I\dot{\theta}_0^2 e^{-2t/\tau}$$

Ainsi, à cause des frottements, l'énegie mécanique décroit exponentiellement.

9) La représentation graphique est la suivante :



Comme d'habitude pour les pendules (élastiques, pesants...), on observe une alternance de conversions (énergie cinétique) → (énergie potentielle) → (énergie cinétique) → (*et caetera*), avec, au fur à mesure, une dissipation de l'énergie mécanique totale dûe aux frottements.

10) On a :

$$\delta = \ln\left(\frac{\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-t/\tau}\sin(\omega t)}{\frac{\dot{\theta}_0}{\omega}e^{-(t+T)/\tau}\sin(\omega(t+T))}\right) = \ln(e^{T/\tau}) = \frac{T}{\tau}$$

sachant que $sin(\omega(t+T)) = \sin(\omega t)$ puisque T est la pseudo-période.

11) On déduit des constatations expérimentales que :

— la pseudo-période vaut $T = \frac{32}{2} = 16\ s$

— le décrément logarithmique : $\delta = \frac{1}{10} \times \ln(3) \simeq 0,11$

— la constante de temps $\tau = \frac{T}{\delta} = 146\ s$

— la pseudo-pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = 0,393 rad/s$ et la pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \frac{1}{tau^2}} \simeq 0,393\ rad/s$ (comme les oscillations sont peu amorties, la pseudo-pulsation est quasiment égale à la pulsation propre)

— la constante de raideur $k = \frac{I\omega_0^2}{2} = 2,00.10^{-6} N.m.rad^{-1}$.

12) Si on considère que la contribution de la tige au moment d'inertie est négligeable et que les masses sont quasi-ponctuelles, on a : $I = 2ml^2$ donc $m = \frac{I}{2l^2} = 0,325\ g$ (ce sont de petites masses).

B - L'expérience de Cavendish

13) D'après la loi d'attraction universelle de Newton, la force gravitationnelle subie par la petite masse vaut en norme :

$$F_g = G\frac{mM}{d^2}$$

et son moment par rapport à l'axe de rotation vaut donc :

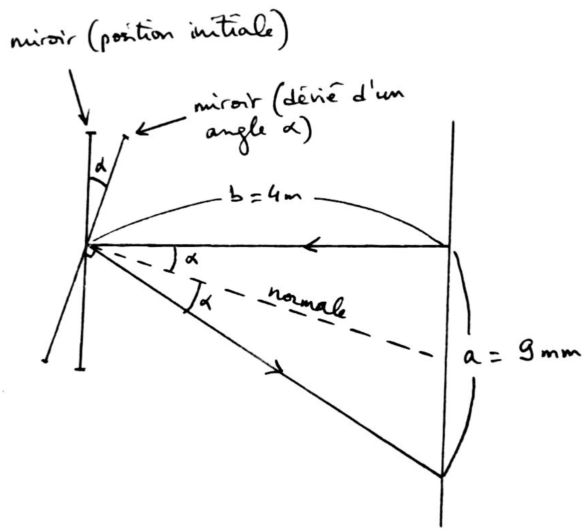
$$M_g = F_g \times l = \frac{GmMl}{d^2}$$

Le système est à l'équilibre lorsque le moment du couple de torsion compense le moment des forces gravitationnelles, soit :

$$2 \times \frac{GmMl}{d^2} - k\alpha = 0$$

(le 2 est lié au fait qu'il y a deux petites masses, qui subissent chacune la même force gravitationelle). Or $\theta = 2\alpha$ donc $\theta = \frac{4GmMl}{kd^2}$.

14)



Le schéma ci dessus montre que, dans l'approximation des petits angles (qui est clairement valable, puisqu'on a une déviation de $9mm$ à une distance de $4m$!), on a : $2\theta \simeq \frac{a}{b}$, donc $\theta \simeq 1,12.10^{-3}rad$, d'où :

$$G = \frac{kd^2\theta}{4mMl} \simeq 3,37.10^{-11}kg^{-1}.m^3.s^{-2}.$$

Remarque : il semblerait que l'on trouve une valeur plus proche de la moitié de G que de G lui même (dont la valeur communément admise est $6,67.10^{-11}u.s.i.$). Je vois deux explications possibles à cela :

— soit une erreur de ma part (mais dans ce cas là, je ne vois pas où elle est : si vous la trouvez, je suis preneur)

— soit une erreur d'énoncé (ce qui ne m'étonnerait pas plus que ça vu que ce sujet de l'ENS Cachan contenait déjà pas mal de coquilles, comme par exemple le "dans le cas de petites oscillations" à la question 3, qui n'avait rien à faire là).

On admettra donc que la valeur trouvée par Cavendish était en fait $G \simeq 2\times 3,37.10^{-11} \simeq 6,74.10^{-11}u.s.i.$, ce qui est déjà beaucoup plus proche de la valeur "actuelle" (1% d'erreur).

15) Connaissant la constante de gravitation universelle, il est assez simple de déduire la masse de la Terre :

— la méthode la plus simple est peut-être d'utiliser l'accélération de la pesanteur g à la surface de la Terre, qui se mesure facilement (par exemple en mesurant la période des oscillations d'un pendule pesant, ou bien la durée de chute d'un objet). On sait ensuite que $g = \frac{GM_T}{R_T^2}$.

— une autre méthode peut consister à utiliser la période de révolution de la Lune autour de la Terre (qui est environ d'un mois). En effet, en supposant que le mouvement de la Lune est quasi-circulaire et en appliquant le PFD à la lune, en projection dur le vecteur $\vec{n}$ de la base de Frenet, on obtient que :$M_L\frac{v^2}{R} = \frac{GM_TM_L}{R^2}$ (où R est la distance Terre-Lune), donc $v = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}$ puis la période de révolution $T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}}$ (c'est la troisième loi de Kepler).

17)

— Avec la première méthode décrite précédemment, on obtient que :

$$M_T = \frac{gR_T^2}{G} \simeq \frac{9,8\times 6400000^2}{6,75.10^{-11}} \simeq 6,02.10^{24}\ kg$$

— Si on utilise au contraire la deuxième méthode décrite précédemment, on obtient que :

$$M_T = \frac{4\pi^2R^3}{GT^2} \simeq 5,97.10^{24}kg$$

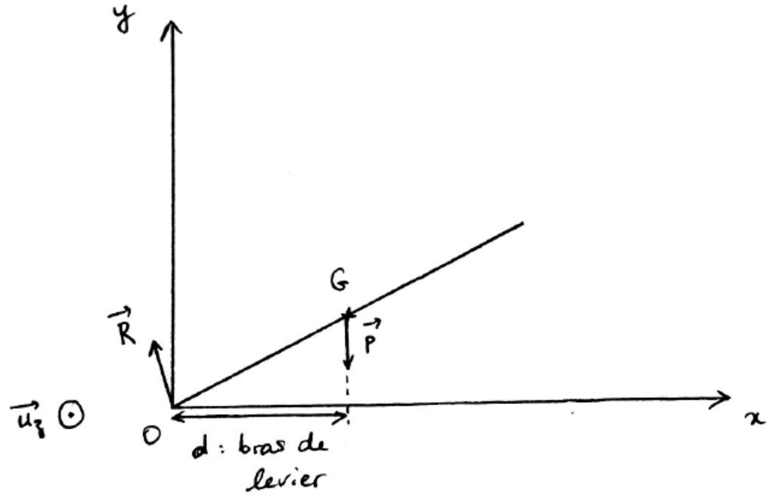
en prenant $T = 27jours$ pour la période de révolution de la Lune (environ 4 semaines)

Dans les deux cas, on retrouve la masse de la Terre en assez bonne approximation.

Exercice 2 : Qui tombe le plus vite ?

Commençons par le plus simple, c'est à dire par exprimer la durée de chute T_b de la bille. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la bille, en projection sur (Oy), dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient $\ddot{y} = -g$, donc en intégrant $\dot{y} = -gt$ (puisqu'il n'y a pas de vitesse initiale) et enfin : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. On en déduit, en résolvant $y(T_b) = 0$, que :

$$T_b = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$



Occupons nous à présent de la tige. On va lui appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) (toujours dans le référentiel terrestre). Calculons tout d'abord les moments des forces appliquées :

— poids : $M_z(\vec{P}) = -d \times mg$, où d est le bras de levier, qui vaut ici $\frac{l}{2}\cos(\theta)$
— réaction du sol : son moment par rapport à (Oz) est nul puisqu'elle s'applique en O

Ainsi, on obtient que :

$$\frac{dL_z}{dt} = -mg\frac{l}{2}\cos(\theta)$$

soit, puisque $L_z = I\dot{\theta} = \frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\cos(\theta)$$

On multiplie par $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = -\frac{3g}{2l}\cos(\theta)\dot{\theta}$$

On intègre par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{3g}{2l}\sin(\theta) + cte$$

D'où, sachant que la tige est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{3g}{2l}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))$$

Remarque : on aurait pu obtenir cette équation plus rapidement en utilisant le théorème de l'énergie mécanique (faites-le !).

D'où :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{l}}\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}$$

(le signe moins est dû au fait que l'angle θ décroit avec le temps)
puis :

$$dt = -\sqrt{\frac{l}{3g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}}$$

et enfin, en intégrant entre l'instant initial et l'instant final :

$$T_t = -\sqrt{\frac{l}{3g}}\int_{\theta_0}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}} = \sqrt{\frac{l}{3g}}\int_{0}^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}} \simeq 1,52\sqrt{\frac{l}{3g}}$$

Le rapport des temps de chute vaut donc :

$$\frac{T_b}{T_t} = \sqrt{\frac{2h}{g}} \times \frac{1}{1,52}\sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{1}{1,52}\sqrt{\frac{6h}{l}} = \frac{1}{1,52}\sqrt{6\sin(30°)} = \frac{1}{1,52}\sqrt{3} \simeq 1,14$$

Ainsi, la tige tombe $1,14$ fois plus vite que la bille, c'est donc la tige qui touchera le sol en premier !

Exercice 3 : Un peu de chimie

A - Autour du silicium

1) D'après les règles de Klechkowski, Pauli et Hund, la configuration électronique du silicium dans son état fondamental est :

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^2$$

On en déduit qu'il est situé en troisième ligne du tableau (puisque sa couche de valence est la couche $n = 3$), dans le bloc p et en $14^{\text{ème}}$ colonne (il a 4 électrons de valence mais il faut rajouter 10 comme c'est le bloc p).

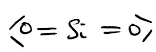
2) L'élément au-dessus du silicium (donc en ligne 2 et colonne 14) aura pour configuration électronique :

$$1s^2\ 2s^2\ 2p^2$$

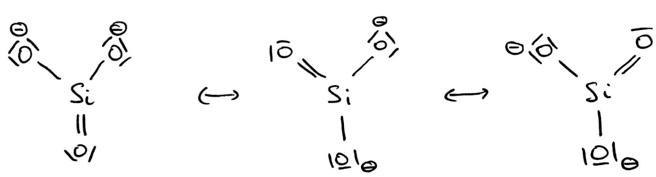
Il aura donc comme numéro atomique $Z = 6$: c'est le carbone !

3) On sait que l'électronégativité diminue lorsqu'on descend dans une colonne. Ainsi, le carbone est plus électronégatif que le silicium.

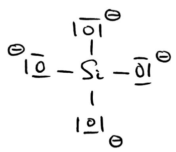
4)



5)



6) La formule de Lewis de l'ion SiO_4^{4-} est la suivante :



Dans l'ion SiO_3^{2-}, les liaisons $Si - 0$ sont des liaisons intermédiaires entre des liaisons doubles et des liaisons simples, tandis que dans SiO_4^{4-}, ce sont des liaisons simples, ainsi, les liaisons de SiO_3^{2-} sont plus courtes que celles de SiO_4^{4-}.

7) Le calcium a pour configuration électronique $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 4s^2$, son nombre d'oxydation habituel sera donc $+II$ (Ca^{2+}).

L'aluminium a pour configuration électronique $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^1$, son nombre d'oxydation favori sera donc $+III$ (configuration électronique du gaz noble qui précède). Il donnera donc en général l'ion Al^{3+} (même si le nombre d'oxydation $+I$ est possible en théorie). Les silicates sont donc composés d'ions Ca^{2+}, Al^{3+} et SiO_4^{4-}. Comme le composé global doit être électriquement neutre, il faut que $2x + 3y - 3 \times 4 = 0$, soit $2x + 3y = 12$. Le plus simple est donc de prendre $x = 3$ et $y = 2$. Ainsi, la formule chimique des silicates sera : $Ca_3Al_2(SiO_4)_3$.

B - Températures d'ébullition

Rappelons pour l'ensemble de cette partie que, plus la température d'ébullition d'un corps pur est élevée, plus cela traduit que les interactions attractives (interactions de Van Der Waals et liaisons hydrogènes) entre les molécules (ou atomes) qui le constituent sont fortes.

8) Les composés hydrogénés de la colonne 14 (CH_4, etc...) sont des molécules apolaires (du fait de leur géométrie tétraédriques) et ne peuvent donc interagir que par des interactions de London, tandis que les composés hydrogénés de la colonne 17 (HF...) sont des molécules polaires et peuvent donc interagir via les trois types d'interactions de Van Der Waals (Keesom, Debye et London). Il est donc naturel que les composés de la colonne 17 s'attirent plus mutuellement que ceux de la colonne 14, et aient donc des températures d'ébullition plus élevées.

9) Cette question est assez délicate. L'explication serait que, plus on descend dans la colonne des halogènes (du Chlore à l'Iode), plus les éléments sont de grandes tailles, et donc plus le moment dipolaire de la molécule composé de cet élément et de l'hydrogène sera grand (car le moment dipolaire est égal au produit de la charge par la distance entre la charge positive et la charge négative) et ainsi, plus les interactions de Van Der Waals entre les molécules seront importantes, ce qui explique que la température d'ébullition augmente quand on descend dans la colonne.

10) L'explication précédente semble être en contradiction avec le fait que HF a une température d'ébullition plus élevée que celles des autres. Cette apparente contradiction s'explique en fait par le fait que, à cause de la forte électronégativité du fluor, les molécules de HF peuvent établir des liaisons hydrogène (ce qui n'est pas le cas de HCl, HBr et HI). Les liaisons hydrogènes étant beaucoup plus fortes que les interactions de Van der Waals, cet effet compense largement l'effet décrit à la question précédente.