

Correction du DS6 de Sciences Physiques

Exercice 1 : Trajectoire d'un volant de badminton

1) On applique la deuxième loi de Newton au volant de badminton dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Puisqu'on néglige la résistance de l'air, la seule force à prendre en compte est le poids. On a donc :

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

d'où $\vec{a} = \vec{g}$.

En projetant sur les axes (Ox) et (Oy), on obtient :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\ddot{y} = -g$$

D'où, en intégrant :

$$\dot{x} = cte = v_0 \cos(\theta_0)$$

$$\dot{y} = gt + cte = -gt + v_0 \sin(\theta_0)$$

En intégrant à nouveau, il vient :

$$x(t) = v_0 \cos(\theta_0)t + cte = v_0 \cos(\theta_0)t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)t + cte = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta_0)t$$

La première équation permet d'exprimer le temps en fonction de l'abscisse x du volant : $t = \frac{x}{v_0 \cos(\theta_0)}$, puis en injectant dans la deuxième équation, on obtient :

$$y(x) = -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} + \tan(\theta_0)x$$

La trajectoire est donc, si on néglige les frottements, une parabole. Cette approximation paraît donc correcte pour le ballon de basket mais mauvaise pour le volant de badminton.

La portée x_{max} est solution de l'équation $y(x) = 0$, soit $-\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\theta_0)} + \tan(\theta_0)x = 0$, qui admet deux solutions : $x = 0$ (normal : c'est la position initiale), ou $x = \frac{2v_0^2 \cos(\theta_0)^2 \tan(\theta_0)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\theta_0)}{g}$. L'application numérique avec les valeurs de la chronophotographie donne $x_{max} = 333m$ au lieu de $x_{max} = 9m$ sur la chronophotographie. Clairement, on ne peut pas négliger la résistance de l'air pour étudier la trajectoire du volant de badminton !

2) Exprimons (en m, kg et s) les unités des quatre grandeurs dont dépend le nombre de Reynolds :

— v est en $m.s^{-1}$

— L est en m

— ρ est en $kg.m^{-3}$

- η est en $Pa.s = N.m^{-2}.s = kg.m.s^{-2}.m^{-2}.s = kg.m^{-1}.s^{-1}$ (on rappelle qu'une pression est une force surfacique, et qu'une force est homogène à une masse fois une accélération)

Re est sans unité. Pour éliminer les kg, il faut forcément faire le rapport $\frac{\rho}{\eta}$ (qui sera en $m^{-2}.s$). Pour éliminer ces unités, il suffit de multiplier par une vitesse et une longueur. Le rapport $\frac{\rho v L}{\eta}$ est donc sans unité. Ce rapport élevé à n'importe quelle puissance (positive ou négative) sera donc aussi sans unité. Mais comme l'énoncé précise que Re doit être proportionnel à la vitesse, la seule solution possible est que :

$$Re = \frac{\rho v L}{\eta}$$

En considérant que le volant de badminton a une taille de $L \simeq 5cm$, on obtient :

- en prenant pour v la vitesse initiale de $58m/s$:

$$Re \simeq 2,0.10^5$$

- en prenant pour v la vitesse finale de $6,7m/s$:

$$Re \simeq 2,4.10^4$$

Tout au long de la trajectoire, l'écoulement de l'air autour du volant est donc turbulent, ce qui justifie que l'on va utiliser une force de frottements proportionnelle au carré de la vitesse.

3) Les unités des différentes grandeurs sont les suivantes :

- F est en $N = kg.m.s^{-2}$
- ρ est en $kg.m^{-3}$
- S est en m^2
- v est en $m.s^{-1}$

Ainsi, C_x est en $\frac{kg.m.s^{-2}}{kg.m^{-3}.m^2.m^2.s^{-2}}$. Après simplification, on remarque que C_x est sans dimension : c'est un coefficient d'aérodynamisme, sans dimension, qui dépend uniquement de la forme de l'objet (il est d'autant plus petit que l'objet a une forme "aérodynamique").

4) Appliquons à nouveau le principe fondamental de la dynamique au volant, cette fois-ci en tenant compte des frottements de l'air :

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \frac{1}{2}\rho SC_x v \vec{v}$$

soit, après simplification par la masse :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{1}{2m}\rho SC_x v \vec{v}$$

Cherchons une solution particulière $\vec{v}_p = \overrightarrow{ct\vec{e}}$ (qui correspondrait donc à un mouvement rectiligne et uniforme). Dans ce cas, puisque $\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \vec{0}$, on aurait :

$$v_p \vec{v}_p = \frac{2m}{\rho SC_x} \vec{g}$$

Ainsi, v_p aurait la même direction que \vec{g} et en norme, on aurait :

$$v_p^2 = \frac{2mg}{\rho SC_x}$$

d'où :

$$v_p = \sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x}}$$

Conclusion : un mouvement rectiligne et uniforme de vecteur vitesse $\vec{v}_{lim} = -\sqrt{\frac{2mg}{\rho SC_x}} \vec{u}_y$ est une solution particulière de l'équation du mouvement.

5) En remplaçant $\frac{1}{2}\rho SC_x$ par $\frac{g}{v_{lim}^2}$, on obtient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{g}{v_{lim}^2} v\vec{v}$$

6) On voit immédiatement sur l'équation précédente que la pesanteur est négligeable devant les frottements de l'air si :

$$g \ll g \frac{v^2}{v_{lim}^2}$$

soit :

$$v \gg v_{lim}$$

On constate que cette condition est assez bien vérifiée au début de la trajectoire du volant de badminton puisque $58m.s^{-1} \gg 6,7m.s^{-1}$.

Si on néglige la pesanteur, la seule force que subit le volant est la force de frottements, qui est colinéaire à sa vitesse. Or, pour que le volant dévie d'une trajectoire rectiligne, il faut qu'il subisse une force qui ne soit pas colinéaire à cette trajectoire. Puisqu'ici ce n'est pas le cas, la trajectoire sera forcément rectiligne.

Remarque : pour ceux qui ne seraient pas convaincus par cet argument, je vous en propose un autre, plus "mathématique". L'équation du mouvement en négligeant le poids s'écrit :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{g}{v_{lim}^2} v\vec{v}$$

Notons $\vec{v} = v\vec{u}$, où \vec{u} est un vecteur unitaire tangent à la trajectoire. Montrer que la trajectoire est rectiligne revient à montrer que \vec{u} est constant.

$$\text{Or } \frac{d}{dt}(v\vec{u}) = \frac{dv}{dt}\vec{u} + v\frac{d\vec{u}}{dt}.$$

De plus, la dérivée d'un vecteur unitaire est toujours orthogonale au vecteur unitaire en question. En effet, si \vec{u} est unitaire, alors $\vec{u}^2 = 1$, soit en dérivant : $2\vec{u} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = 0$.

En faisant le produit scalaire de l'équation du mouvement par $\frac{d\vec{u}}{dt}$ et en utilisant ce dernier point, on obtient que $v(\frac{d\vec{u}}{dt})^2 = 0$, ce qui montre que \vec{u} est constant, et donc que la trajectoire est rectiligne.

7) L'équation du mouvement en négligeant la pesanteur et en projetant dans la direction où a lieu le mouvement (puisque l'on sait qu'il est rectiligne) donne :

$$\frac{dv}{dt} = -g \frac{v^2}{v_{lim}^2}$$

Pour résoudre cette équation non linéaire du premier ordre, il faut séparer les variables. On obtient alors :

$$-\frac{dv}{v^2} = \frac{g}{v_{lim}^2} dt$$

D'où, en intégrant :

$$\frac{1}{v} = \frac{g}{v_{lim}^2} t + cte$$

En appliquant à $t = 0$, on obtient que $cte = \frac{1}{v_0}$.

On obtient donc que :

$$v(t) = \frac{v_0 v_{lim}^2}{v_{lim}^2 + g v_0 t} = \frac{v_0}{1 + \frac{g v_0}{v_{lim}^2} t}$$

Remarque : on a déjà rencontré exactement la même équation différentielle en cinétique chimique dans le cas d'une réaction d'ordre 2.

$t_{1/2}$ vérifie $v(t_{1/2}) = \frac{v_0}{2}$. Puisqu'on avait :

$$\frac{1}{v} = \frac{g}{v_{lim}^2} t + \frac{1}{v_0}$$

on obtient, en remplaçant :

$$\frac{2}{v_0} = \frac{g}{v_{lim}^2} t_{1/2} + \frac{1}{v_0}$$

soit, après calcul :

$$t_{1/2} = \frac{v_{lim}^2}{v_0 g} \simeq 79ms$$

8) Pour déterminer $t_{1/2}$ sur le schéma, il faut regarder quand la distance entre deux positions successives est égale à la moitié de la distance initiale. On remarque que cela a lieu entre le point 2 et le point 3, ce qui signifierait que $t_{1/2}$ est compris entre $100ms$ et $150ms$. Ainsi on n'a pas un accord parfait avec notre valeur calculée, mais l'ordre de grandeur est correct. La mesure de $t_{1/2}$ sur la chronographie est de toute façon imprécise puisqu'on n'a pas accès aux vitesses instantanées mais seulement aux vitesses moyennes sur des intervalles de $50ms$.

9) Calculons tout d'abord $\dot{x}(t)$. Puisque dans le cadre de notre approximation la trajectoire est rectiligne, le vecteur vitesse fait constamment un angle θ_0 avec l'horizontale.

$$\text{Ainsi, } \dot{x} = v \cos(\theta_0) = \frac{v_0 \cos(\theta_0)}{1 + \frac{g v_0}{v_{lim}^2} t}.$$

Il suffit ensuite d'intégrer par rapport au temps pour déterminer $x(t)$, ce qui donne :

$$x(t) = \int \frac{v_0 \cos(\theta_0)}{1 + \frac{g v_0}{v_{lim}^2} t} dt = \frac{v_{lim}^2}{g} \cos(\theta_0) \ln\left(1 + \frac{g v_0}{v_{lim}^2} t\right) + cte$$

Pour déterminer la constante, on applique en $t = 0$, ce qui donne $cte = 0$ puisque $x(0) = 0$.

En remarquant que $1 + \frac{g v_0}{v_{lim}^2} t = \frac{v_0}{v}$, on peut écrire que :

$$x(t) = \frac{v_{lim}^2}{g} \cos(\theta_0) \ln\left(\frac{v_0}{v}\right)$$

10) La composante verticale de la force de freinage sera égale (en norme) au poids lorsque :

$$g \frac{v^2}{v_{lim}^2} \sin(\theta_0) = g$$

soit :

$$v = \frac{v_{lim}}{\sqrt{\sin(\theta_0)}}$$

D'où la distance parcourue à cet instant :

$$D = \frac{v_{lim}^2}{g} \cos(\theta_0) \ln\left(\frac{v_0 \sqrt{\sin(\theta_0)}}{v_{lim}}\right)$$

11) Dans le régime limite, d'après ce que l'on a vu à la question 4, le mouvement doit être rectiligne et uniforme, de direction verticale. On peut dire que c'est approximativement le cas à partir du 40ème point environ : on voit que le mouvement est quasiment uniforme car la distance entre les points reste constante. Par contre, la trajectoire n'est pas encore tout à fait verticale, ce qui signifie que le régime limite n'est pas tout à fait atteint (mais presque). Puisque les points sont espacés de 50ms, on peut dire que le régime limite est atteint au bout de 2 secondes environ.

12) Si l'on néglige le régime intermédiaire, la trajectoire se compose de deux segments de droites : un premier segment oblique, faisant un angle θ_0 avec l'horizontale, et un deuxième segment vertical.

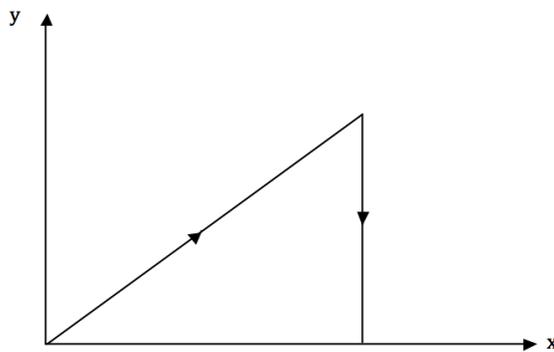


FIGURE 1 – Trajectoire simplifiée du volant de badminton, si on néglige le régime intermédiaire

Dans cette approximation, la portée x_{max} est égale à la distance D calculée à la question 10, soit, en faisant l'application numérique : $x_{max} \simeq 5,7m$. Cette portée est trop courte (normal puisqu'on néglige la distance parcourue pendant le régime transitoire), mais déjà plus cohérente que celle obtenue en négligeant les frottements à la question 1.

13) Reprenons l'équation du mouvement, dans le cas où on ne néglige aucun terme :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{g} - \frac{g}{v_{lim}^2} v\vec{v}$$

Si on écrit l'accélération à l'aide de la formule de Frenet (ou en coordonnées polaires pour un mouvement circulaire, ce qui reviendrait au même), on obtient :

$$\frac{v^2}{R}\vec{n} + \frac{dv}{dt}\vec{t} = \vec{g} - \frac{g}{v_{lim}^2}v\vec{v}$$

Or, au niveau du sommet de la trajectoire, on peut considérer en bonne approximation que \vec{g} est orthogonal à la trajectoire (i.e. porté par \vec{n}), tandis que \vec{v} est, bien sûr tangent à la trajectoire (donc porté par \vec{t}), d'où, en projetant sur \vec{n} :

$$\frac{v^2}{R} \sim g$$

soit $R \sim \frac{v^2}{g}$.

De plus, comme l'énoncé dit que, sur cette partie de la trajectoire, tous les termes de l'équation différentielle sont du même ordre, on a : $g \sim g \frac{v^2}{v_{lim}^2}$, soit $v \sim v_{lim}$, d'où au final :

$$R \sim \frac{v_{lim}^2}{g} \sim 4,6m$$

Si on rajoute ces 4,6m aux 5,7m déterminés précédemment pour la première phase rectiligne, on obtient bien un résultat assez proche de la portée réelle, qui est de 9m. Bien sûr le calcul effectué dans cette question 13 est extrêmement approximatif et donne seulement un *ordre de grandeur* de la distance parcourue pendant le régime transitoire. D'ailleurs, si on dit que le volant parcourt un demi-cercle pendant le régime transitoire, cela correspondrait à une distance de $2R \sim 9m$, ce qui, ajouté aux 5,7m de la première phase, donnerait une portée trop grande.

14) En fait, cet exercice montre que, contrairement à ce que l'on pourrait penser "naïvement", la différence entre la trajectoire quasi-parabolique du ballon de basket et la trajectoire pas du tout parabolique du volant de badminton n'est pas due à la forme différente de ces deux objets. Ce qui compte est *l'écart entre la vitesse initiale et la vitesse limite*. Plus précisément :

- Si la vitesse initiale est faible devant la vitesse limite, comme c'est le cas pour le ballon de basket, ou pour un objet quelconque que l'on lancerait doucement, on obtiendra une trajectoire parabolique
- Si la vitesse initiale est grande devant la vitesse limite, on obtiendra la trajectoire en "trois phases" du volant de badminton : 2 parties quasi-rectilignes séparées par une partie incurvée. Ce type de trajectoire avait déjà été décrit par l'italien Niccolo Tartaglia dès 1537 en étudiant des boulets de canon (qui sont pourant plus similaires, au niveau de leur forme, à des ballons de basket qu'à des volants de badminton). On les observe dans de nombreux domaines différents, comme le montre la figure 2.



FIGURE 2 – Trajectoires similaires à celle du volant de badminton, obtenues pour des particules projetées à grande vitesse lors d'une soudure, des feux d'artifice ou des jets d'eau

Remarque : Cet exercice correspondait à la première moitié du sujet de physique X-ENS 2015, filière PC, sujet lui-même largement inspiré de l'article "The aerodynamic wall" par Caroline Cohen, Baptiste Darbois-Textier, Guillaume Dupeux, Eric Brunel, David Quéré et Christophe Clanet, paru le 30 Octobre 2013 dans la revue "Proceedings of the royal society A" (disponible gratuitement en ligne).

Exercice 2 : Etude de l'accéléromètre d'une console de jeu vidéo :

1) Supposons que le joueur secoue périodiquement (et sinusoidalement) la manette. Le mouvement de la manette est alors de la forme :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi) = X_m \cos(2\pi f t + \varphi)$$

et son accélération est donc donnée par :

$$\ddot{x}(t) = -(2\pi f)^2 X_m \cos(2\pi f t + \varphi)$$

Ainsi, l'amplitude de l'accélération de la manette est donnée par $A_m = (2\pi f)^2 X_m$.

Comme valeurs numériques, on peut raisonnablement prendre $X_m \simeq 10\text{cm}$ (amplitude des oscillations imposées à la manette).

Quant à la fréquence f , qui représente le nombre d'aller-retours que fera la manette en une seconde, on peut considérer que les valeurs extrêmes seront $f_{max} = 3\text{Hz}$ s'il secoue très vite, et $f_{min} = \frac{1}{3}\text{Hz}$ s'il va très lentement (évidemment, en théorie, il peut aller aussi lentement qu'il veut, donc f_{min} peut tendre vers zéro, mais ça n'a pas trop d'intérêt).

On trouve donc une accélération maximale de $a_{max} = (6\pi)^2 \times 0,1 \simeq 35\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \simeq 3,5g$ et une accélération minimale de $a_{min} = (\frac{2}{3}\pi)^2 \times 0,1 \simeq 0,4 \simeq 0,04g$.

On est donc bien dans les limites de ce que peut détecter l'accéléromètre (entre 0,01 g et 5g).

2) Référentiel d'étude : le référentiel terrestre supposé galiléen (on ne peut pas choisir comme référentiel le boîtier de l'accéléromètre car il n'est pas galiléen puisqu'il n'est pas en translation rectiligne uniforme par rapport au sol).

Système étudié : la masse d'épreuve.

Bilan des forces : le poids ($\vec{P} = m\vec{g}$), la réaction normale de l'axe (qui compense le poids), la force de rappel du ressort ($\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{u} = -kX\vec{u}$ puisque l'énoncé précise que le ressort est au repos lorsque $X = 0$), la force de frottement visqueux : $\vec{F}^v = -2m\gamma\dot{X}\vec{u}$.

L'application de la deuxième loi de Newton donne donc :

$$m\vec{a}_R = -k\dot{X}\vec{u} - 2m\gamma\dot{X}\vec{u}$$

La difficulté est que \vec{a}_R est ici l'accélération de la masse dans le référentiel terrestre, et n'est donc pas égale à $\ddot{X}\vec{u}$, qui est l'accélération de la masse par rapport au boîtier.

Plus précisément, la position de la masse (par rapport au point O) peut s'écrire :

$$x(t) = x_b(t) + X(t)$$

où $x_b(t)$ représente la position du centre du boîtier par rapport au sol.

En dérivant deux fois, on obtient donc :

$$\ddot{x} = \ddot{x}_b + \ddot{X}$$

Or \ddot{x}_b n'est autre que l'accélération du boîtier de l'accéléromètre par rapport au sol, c'est à dire l'accélération $a(t)$ que le joueur impose à la manette.

On a donc $\vec{a}_R = (a + \ddot{X})\vec{u}$.

En projetant la deuxième loi de Newton sur \vec{u} , on obtient donc que :

$$m(a + \ddot{X}) = -k\dot{X} - 2m\gamma\dot{X}$$

soit, après simplification par la masse :

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = -a$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3) On a affaire à une équation différentielle linéaire non homogène de degré deux. Sa solution générale est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée.

Ici on voit que $X_p = -\frac{a}{\omega_0^2}$ convient comme solution particulière.

Reste donc à résoudre l'équation homogène $\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$.

L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$$

Le discriminant s'écrit : $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$.

On distingue donc deux cas (l'énoncé n'a pas l'air de vouloir s'intéresser au régime critique).

— Cas faiblement amorti où $\gamma < \omega_0$ (régime pseudo-périodique) :

Dans ce cas, $\Delta < 0$ et l'équation caractéristique admet donc deux racines complexes :

$$r_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = -\gamma \pm i\omega_p \text{ en notant } \omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \text{ la pseudo-pulsation.}$$

Dans ce cas, on sait que la solution générale de l'équation homogène sera de la forme :

$$X_h(t) = X_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_p t + \varphi)$$

et la solution de l'équation complète sera donc :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_0^2} + X_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_p t + \varphi)$$

— Cas fortement amorti où $\gamma > \omega_0$ (régime apériodique) :

Dans ce cas, $\Delta > 0$ et l'équation caractéristique admet deux racines complexes : $r_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$.

Ces deux racines sont négatives : pour une c'est évident, et pour l'autre c'est lié au fait que $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < \gamma$.

On pose donc $\tau_{1,2} = -\frac{1}{r_{1,2}}$. Les constantes τ_1 et τ_2 seront donc positives et homogènes à des temps.

Dans ce cas, la solution générale de l'équation différentielle s'écrira :

$$X(t) = -\frac{a}{\omega_0^2} + A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$$

4) Dans les deux cas (pseudo-périodique et apériodique), il est évident que la solution de l'équation homogène tend vers zéro quand t tend vers l'infini, et que $X(t)$ tend donc vers une valeur stationnaire :

$$X_\infty = -\frac{a}{\omega_0^2}$$

5) On obtient avec Python les courbes suivantes :

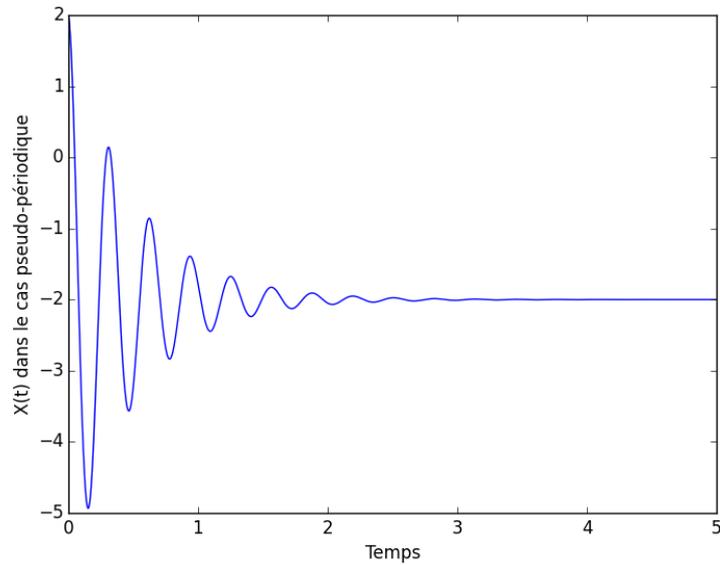


FIGURE 3 – Allure de $X(t)$ dans le cas où $\gamma < \omega_0$.

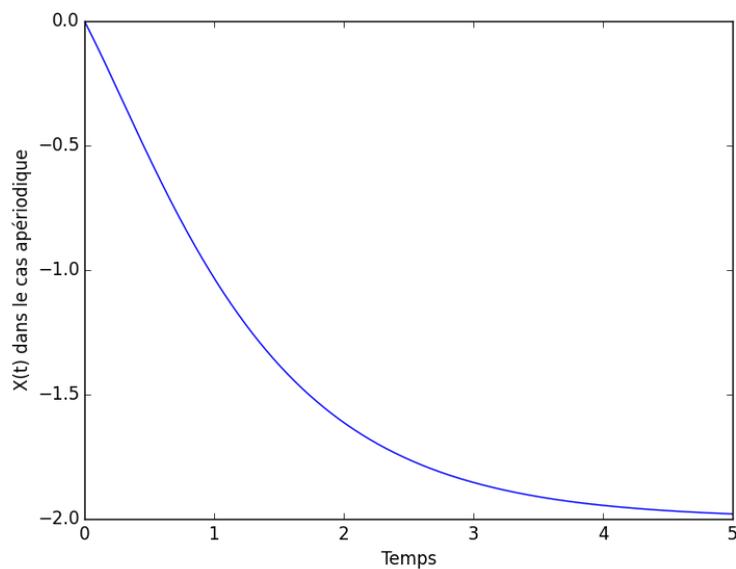


FIGURE 4 – Allure de $X(t)$ dans le cas où $\gamma > \omega_0$.

6) Le "temps de réponse" τ_r est le temps caractéristique de la décroissance de la solution de l'équation homogène (en d'autres termes, on pourra considérer qu'au bout de $5\tau_r$ le régime stationnaire sera atteint à 99%).

- Dans le cas du régime pseudo-périodique où la solution homogène est de la forme $X_h(t) = X_m e^{-\gamma t} \cos(\omega_p t + \varphi)$, on voit que le temps de réponse vaut $\tau_r = \frac{1}{\text{gamma}}$.
- Dans le cas du régime apériodique, la solution de l'équation homogène s'écrit : $X_h(t) = A e^{-t/\tau_1} + B e^{-t/\tau_2}$. On a donc $\tau_r = \max(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$.

7) On cherche à tracer l'allure de la fonction $\tau_r(\gamma)$.

Dans le cas pseudo-périodique où $\gamma < \omega_0$, on voit qu'il s'agit d'une hyperbole.

Dans le cas apériodique où $\gamma > \omega_0$, la fonction $\tau_r(\gamma) = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$ est plus difficile à étudier. On peut essayer d'en obtenir un équivalent dans le cas très amorti où $\gamma \gg \omega_0$.

En effet : $\tau_r(\gamma) = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}} = \frac{1}{\gamma(1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}})} \simeq \frac{1}{\gamma(1 - 1 - \frac{\omega_0^2}{2\gamma^2})} \simeq \frac{2\gamma}{\omega_0^2}$.

Ainsi dans la limite où $\gamma \gg \omega_0$, la fonction $\tau_r(\gamma)$ aura l'allure d'une droite de pente $\frac{2}{\omega_0^2}$.

Avec Python, on obtient la courbe suivante, pour le temps de réponse en fonction de γ :

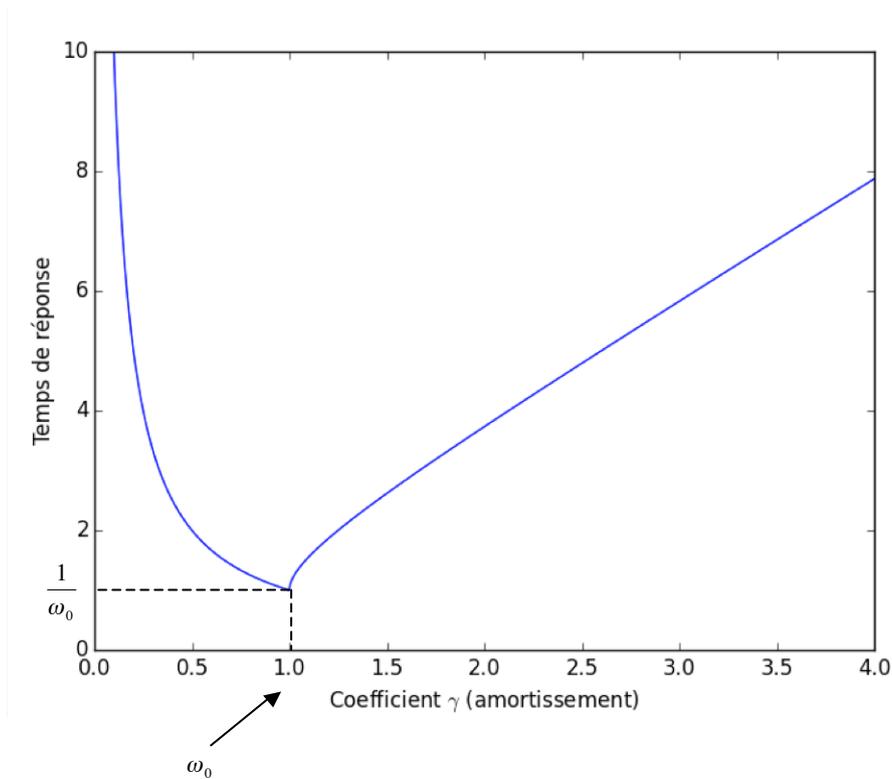


FIGURE 5 – Temps de réponse en fonction de γ (on a pris $\omega_0 = 1 \text{ rad.s}^{-1}$).

8) On voit sur le graphe précédent que, pour une pulsation ω_0 donnée, le temps de réponse minimal est obtenu lorsque $\gamma = \omega_0$ (c'est à dire dans le régime critique) et vaut $\tau_{min} = \frac{1}{\omega_0}$.

9) Le temps de réponse vaut $\tau = \frac{1}{\gamma} = 0,29 \text{ ms}$ et le déplacement stationnaire $X_\infty = -\frac{a}{\omega_0^2} = 0,84 \text{ nm}$. Il s'agit donc d'un déplacement infime (de la taille de quelques atomes), mais étonnamment suffisant pour être détecté!

10) Pour que l'accéléromètre soit très sensible (et donc capable de détecter de très faibles accélérations), il faut que le déplacement de la masse d'épreuve X_∞ soit le plus grand possible pour une accélération donnée, ce qui nécessite que ω_0 soit plutôt petit puisque $X_\infty = -\frac{a}{\omega_0^2}$. Mais si on veut que le temps de

réponse soit court, il faut que ω_0 soit plutôt grand puisque le temps de réponse minimal vaut $\frac{1}{\omega_0}$. On doit donc effectivement faire un compromis entre temps de réponse et sensibilité et choisir une valeur de ω_0 "ni trop grande, ni trop petite".

11) L'équation différentielle satisfaite par $X(t)$ s'écrit dans ce cas :

$$\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_0^2 X = -A_m \cos(\omega t)$$

Notons \underline{X}_m l'amplitude complexe de $X(t)$ en régime sinusoïdal forcé. \underline{X}_m vérifie l'équation :

$$(j\omega)^2 \underline{X}_m + 2\gamma(j\omega)\underline{X}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m = -A_m$$

ce qui donne :

$$\underline{X}_m = \frac{-A_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\gamma\omega}$$

Il suffit alors de prendre le module pour trouver l'amplitude réelle :

$$X_m = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

12) Notons $f(\omega)$ la fonction sous la racine au dénominateur : $f(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$.

X_m est maximale lorsque f est minimale.

On résout donc $f'(\omega) = 0$, ce qui donne :

$$4\omega(\omega^2 - \omega_0^2) + 8\gamma^2\omega = 0$$

soit :

$$4\omega(\omega^2 - \omega_0^2 + 2\gamma^2) = 0$$

ce qui donne soit $\omega = 0$, soit $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$, cette deuxième racine n'existant que si $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$.

Ainsi, si $\omega_0 > \sqrt{2}\gamma$, on observera un phénomène de résonance à la pulsation $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

13) On voit facilement (compte tenu que $X_m = \frac{A_m}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$) que X_m tend vers $\frac{A_m}{\omega_0^2}$ lorsque $\omega \rightarrow 0$ tandis que X_m tend vers 0 lorsque $\omega \rightarrow +\infty$.

Il s'agit donc d'un filtre passé bas.

Pour tracer le diagramme de Bode, faisons intervenir la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$:

$$\underline{X}_m = \frac{-A_m}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2j\gamma\omega} = \frac{\frac{-A_m}{\omega_0^2}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

D'où, si l'on définit la fonction de transfert \underline{H} comme $\underline{H} = \frac{\underline{X}_m}{\frac{A_m}{\omega_0^2}}$:

$$\underline{H} = \frac{-1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

Pour tracer le diagramme de Bode asymptotique, on va étudier les limites $x \ll 1$ et $x \gg 1$:

	$x \ll 1$	$x = 1$	$x \gg 1$
\underline{H}	-1	jQ	$\frac{1}{x^2}$
G_{dB}	0 : asymptote horizontale	$20 \log(5) \simeq -9,5$	$-40 \log(x)$ pente $-40dB/decade$
φ	$\pm\pi$ (on choisit $+\pi$ vu la valeur en $x = 1$)	$\frac{\pi}{2}$	0

Le diagramme de Bode a l'allure suivante :

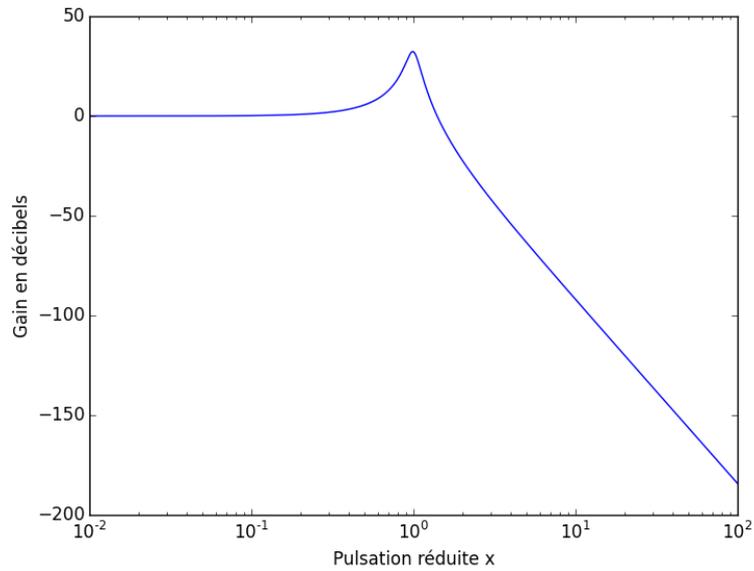


FIGURE 6 – Diagramme de Bode en gain

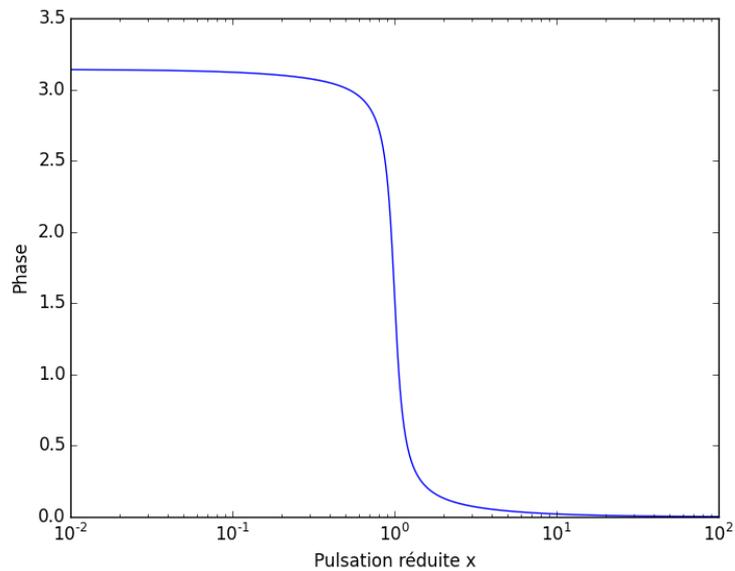


FIGURE 7 – Diagramme de Bode en phase

On voit que l'accéléromètre ne fonctionnera plus pour des fréquences supérieures à 5500 Hz, ce qui n'est pas un problème puisque de telles fréquences ne sont pas atteignables pour un être humain !

14) a) On peut proposer le circuit suivant :

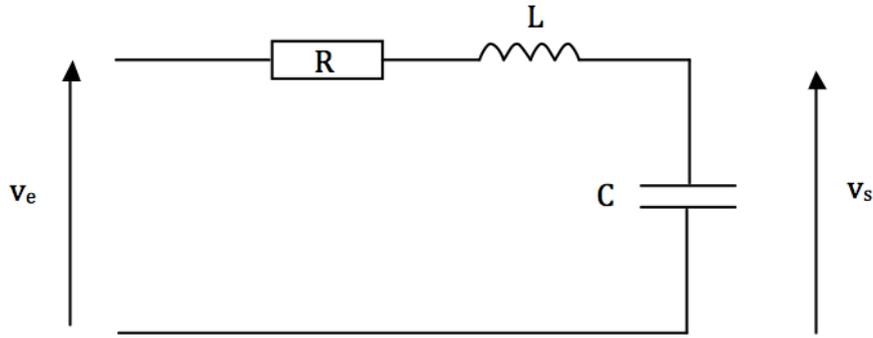


FIGURE 8 – Filtre passe bas d'ordre 2

b) À très basses fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. Il n'y a donc aucun courant qui circule dans la résistance, et donc aucune tension à ses bornes. La loi des mailles donne donc immédiatement que $v_s = v_e$: le signal à basse fréquence passe. À très haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, et donc $v_s = 0$ (tension aux bornes d'un fil).

Il s'agit donc bien d'un filtre passe bas.

c) Les dipôles étant en série, on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension qui donne :

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{R}{L}\omega} = \frac{1}{1 - \frac{\omega}{\omega_0^2} + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

en posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Si l'on prend une bobine d'inductance $L = 10mH$, pour avoir une pulsation $\omega_0 = 2\pi \times 5500rad/s$, il faut choisir un condensateur de capacité $C = 84nF$, puis, pour avoir un facteur de qualité de 5, il suffit d'utiliser une résistance de 70Ω .