Correction du DS5 de Sciences Physiques

Exercice 1 : Etude d'un circuit linéaire d'ordre 2 :

1) À très basse fréquence, les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, ainsi, aucun courant ne circule dans la résistance de droite (ni dans l'autre, d'ailleurs), et $v_s = Ri = 0$.

À très haute fréquence, les condensateurs se comportent comme des fils, les deux résistances et la source sont donc tous trois branchés en parallèle, et il vient immédiatement que $s(t) = e(t)$.

Cette analyse qualitative montre que le circuit est très certainement un filtre passe-haut.

2) Appelons $u(t)$ la tension aux bornes de la résistance "du milieu".

Puisque la résistance de droite et le condensateur de droite sont en série, on peut appliquer le diviseur de tension et on obtient que :

$$\underline{s} = \underline{u}\frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{u}\frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega}} \tag{1}$$

Calculons d'autre part, l'impédance équivalent à l'ensemble R-C série de droite en parallèle avec la résistance du milieu. On a :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{2R + \frac{1}{jC\omega}}{R(R + \frac{1}{jC\omega})} = \frac{2 + \frac{1}{jRC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

D'où, à nouveau grâce au diviseur de tension, puisque cet ensemble est en série avec le condensateur de gauche :

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \frac{1}{jC\omega}} = \underline{e}\frac{1}{1 + \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}\frac{1}{jC\omega}} = \underline{e}\frac{1}{1 + \frac{\frac{1}{JC\omega}(2+\frac{1}{jRC\omega})}{R+\frac{1}{JC\omega}}} \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), on obtient :

$$\underline{s} = \underline{e}\frac{1}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + \frac{1}{jRC\omega}(2 + \frac{1}{jRC\omega})} = \underline{e}\frac{1}{1 + \frac{3}{jRC\omega} + \frac{1}{(jRC\omega)^2}}$$

soit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{(jRC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

Cet expression est bien de la forme $\underline{H} = \frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$ en posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ et $Q = \frac{1}{3}$.

3) Pour tracer le diagramme de Bode asymptotique, on va étudier les limites $x << 1$ et $x >> 1$:

	$x << 1$	$x = 1$	$x >> 1$
$\underline{H}$	$-x^2$	$\frac{j}{3}$	1
G_{dB}	$40\log(x)$: asymptote de pente 40 dB/décade	$20\log(1/3) \simeq -9,5$	0 : asymptote horizontale
φ	$\pm\pi$ (on choisit $+\pi$ vu la valeur en $x = 1$)	$\frac{\pi}{2}$	0

On obtient alors le diagramme de Bode suivant :

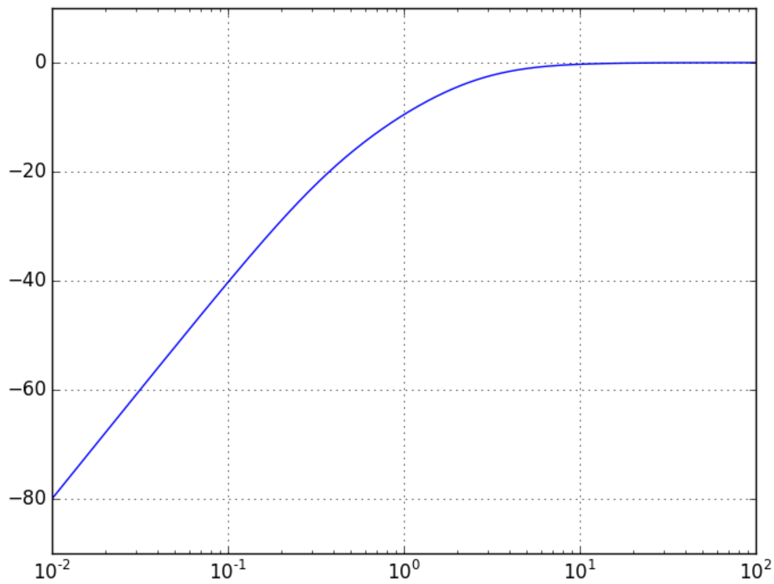


FIGURE 1 – Diagramme de Bode en gain

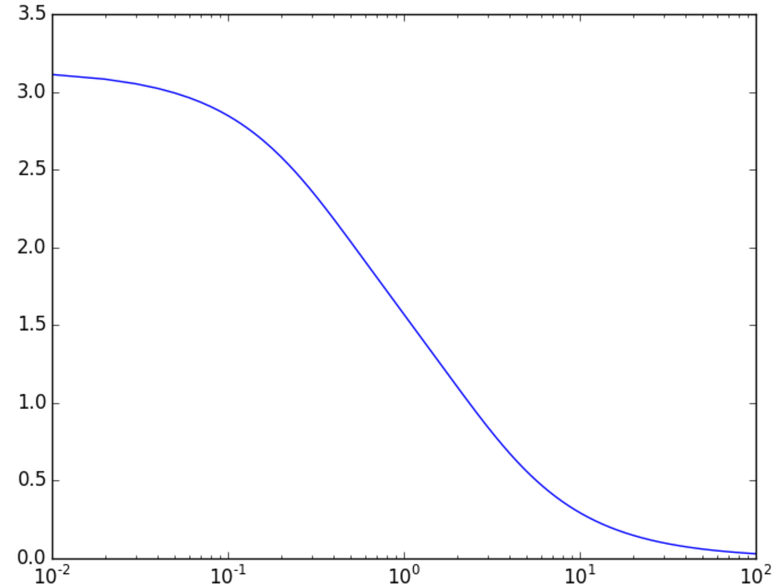


FIGURE 2 – Diagramme de Bode en phase

4) Calculons ω_0 à l'aide des valeurs de R et de C :

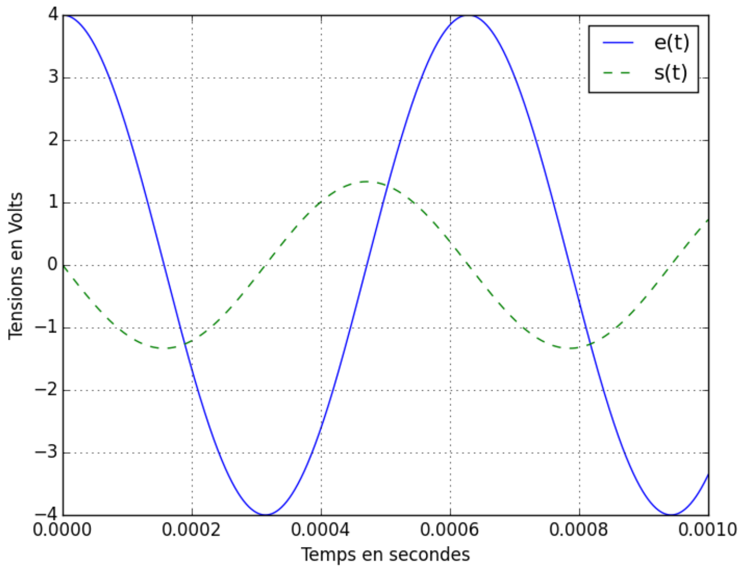
$$\omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{2.10^3.50.10^{-9}} = 1,0.10^4 rad/s$$

Ainsi, pour le signal étudié, on a $\omega = \omega_0$, soit $x = 1$.

On sait de plus que le signal de sortie $s(t)$ est de la forme :

$$s(t) = S\cos(\omega t + \varphi)$$

où $S = |\underline{H}(j\omega)| \times E = 4|\underline{H}(j\omega)| = \frac{4}{3}$ (en utilisant l'expression de $\underline{H}$ pour $x = 1$) et $\varphi = arg(\underline{H}(j\omega)) = \frac{\pi}{2}$ (toujours en utilisant l'expression de $\underline{H}$ pour $x = 1$).
Ainsi le signal de sortie vaudra $s(t) = \frac{4}{3}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}$.
Le tracé des signaux $e(t)$ et $s(t)$ (qui sont donc en quadrature de phase) donne les courbe suivante :



5) À basse fréquence, c'est à dire lorsque $\omega << \omega_0$, ou en core $x << 1$, la fonction de transfert est environ égale à : $\underline{H} \simeq -x^2 = -R^2C^2\omega^2 = R^2C^2(j\omega)^2$.
Ainsi, dans cette gamme de fréquence, on a :

$$\underline{s} \simeq R^2C^2(j\omega)^2\underline{e}$$

ce qui donne, en notation réelle :

$$s(t) = R^2C^2\frac{d^2e}{dt^2}$$

Donc l'effet du filtre à basse fréquence ($f << \frac{1}{2\pi RC}$) est une double dérivation du signal d'entrée.

6) On a vu à la question 2) que :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{(jRC\omega)^2}{1 + 3jRC\omega + (jRC\omega)^2}$$

D'où, par un produit en croix :

$$(RC)^2(j\omega)^2\underline{e} = \underline{s} + 3RC(j\omega)\underline{s} + (RC)^2(j\omega)^2\underline{s}$$

soit, en remplaçant les $j\omega$ par des dérivées temporelles pour repasser en notation réelle :

$$R^2C^2\frac{d^2e}{dt^2} = s(t) + 3RC\frac{ds}{dt} + R^2C^2\frac{d^2s}{dt^2}$$

soit encore :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = \frac{d^2e}{dt^2}$$

7) Introduisons les notations de la figure 3.

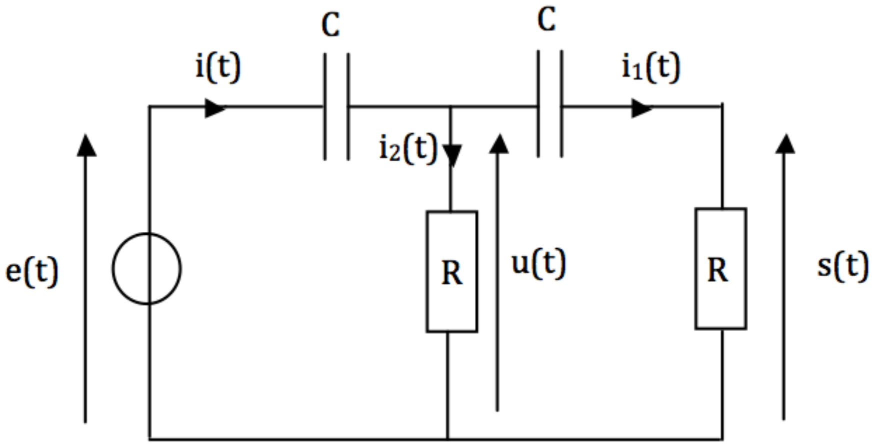


Figure 3 – Notations pour la question 5)

On a les relations suivantes :

— D'après la loi des noeuds :

$$i = i_1 + i_2 \tag{3}$$

— Sachant que la tension aux bornes du condensateur de gauche est $e - u$ (avec $u = Ri_2$), on a :

$$i = C\frac{d}{dt}(e-u) = C\frac{d}{dt}(e - Ri_2) = C\frac{de}{dt} - RC\frac{di_2}{dt} \tag{4}$$

— De même pour l'autre condensateur :

$$i_1 = C\frac{d}{dt}(u-s) = C\frac{d}{dt}(Ri_2 - s) = RC\frac{di_2}{dt} - C\frac{ds}{dt} \tag{5}$$

— Enfin, la loi d'Ohm donne :

$$s = Ri_1 \tag{6}$$

On a donc quatre équations pour quatre inconnues (s, i, i_1, i_2). Reste à se débrouiller pour éliminer les inconnues e, i_1 et i_2.

(5) donne : $\frac{di_2}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{RC}i_1 = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R^2C}s$ (en utilisant (6)).

(3) donne, en utilisant (4) et (6) : $C\frac{de}{dt} - RC\frac{di_2}{dt} = \frac{s}{R} + i_2$, soit, en remplaçant $\frac{di_2}{dt}$ par sa valeur déterminée ci-dessus : $C\frac{de}{dt} - C\frac{ds}{dt} - \frac{s}{R} = \frac{s}{R} + i_2$.

Si on dérive cette dernière équation, on obtient : $C\frac{d^2e}{dt^2} - C\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{di_2}{dt}$. En remplaçant à nouveau $\frac{di_2}{dt}$ par son expression, on obtient au final :

$$C\frac{d^2e}{dt^2} - C\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} = \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R^2C}s$$

Soit, en divisant par C et en réorganisant les termes :

$$\frac{d^2e}{dt^2} = \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{3}{RC}\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R^2C^2}s$$

Ce qui est bien la même équation que celle obtenue grâce à la fonction de transfert (ouf !).

8)a) Les tensions aux bornes des condensateurs étaient nulles à $t = 0^-$ (condensateurs déchargés) donc elles sont aussi nulles à $t = 0^+$ puisque la tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps. Une loi des mailles donne alors immédiatement que $s(0^+) = E$.

En $+\infty$, le circuit est en régime continu et les condensateurs se comportent donc comme des interrupteurs ouverts. Ainsi, aucun courant ne circule dans la résistance de droite et on a $s(+\infty) = 0$.

b) Pour $t > 0$, $e(t) = E = cte$ donc $\frac{d^2e}{dt^2} = 0$. Ainsi, pour $t > 0$, l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s(t) = 0$$

L'équation caractéristique de cette équation différentielle linéaire d'ordre deux est :

$$r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant vaut donc :

$$\Delta = 9\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 5\omega_0^2 > 0$$

On sera donc dans le régime apériodique. L'équation caractéristique admet donc deux racines réelles (négatives) :

$$r_{1,2} = \frac{-3\omega_0 \pm \sqrt{5}\omega_0}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\omega_0$$

La solution générale de l'équation différentielle s'écrira donc :

$$s(t) = A\exp(r_1 t) + B\exp(r_2 t) = A\exp\left(\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right) + B\exp\left(\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\omega_0 t\right)$$

c) On peut remarquer que les deux racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique sont négatives (c'est évident pour une, et pour l'autre c'est lié au fait que $3 = \sqrt{9} > \sqrt{5}$).

On peut donc écrire la solution générale comme :

$$s(t) = A\exp(\frac{-t}{\tau_1}) + B\exp(\frac{-t}{\tau_2})$$

où $\tau_1 = \frac{2}{(3+\sqrt{5})\omega_0}$ et $\tau_2 = \frac{2}{(3-\sqrt{5})\omega_0}$.

Ainsi, la solution est la somme de deux exponentielles décroissantes, l'une s'atténuant avec un temps caractéristique τ_1 et l'autre s'atténuant avec un temps caractéristique τ_2. Puisque $\tau_2 > \tau_1$ on peut dire que τ_2 est le temps caractéristique du régime transitoire (en d'autres termes, le régime transitoire est terminé à 99% au bout de $5\tau_2$ environ).

L'application numérique donne : $\tau_2 = \frac{2}{(3-\sqrt{5})\omega_0} \simeq 2,6.10^{-4}s \simeq 0,26ms$ (ainsi, on peut considérer que le transitoire est terminé au bout de $5\tau_2 \simeq 1,3ms$).

Exercice 2 : Quartz et électronique :

1) On voit que le quartz est modélisé par l'association en parallèle de :

— un condensateur de capacité C_p

— l'association en série d'un condensateur de capacité C_s et d'une bobine d'inductance L

On peut donc écrire que :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = jC_p\omega + \frac{1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}}$$

soit, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{-C_pL\omega^2 + \frac{C_p}{C_s} + 1}{jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}}$$

D'où :

$$\underline{Z} = \frac{jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}}{-C_pL\omega^2 + \frac{C_p}{C_s} + 1} = \frac{(\frac{1}{jC_s\omega})(1 - LC_s\omega^2)}{(1 + \frac{C_p}{C_s})(1 - \frac{C_pL\omega^2}{1+\frac{C_p}{C_s}})} = \left(\frac{-j}{(C_p + C_s)\omega}\right) \frac{1 - LC_s\omega^2}{1 - (\frac{C_pC_sL}{C_p+C_s})\omega^2}$$

ce qui est bien de la forme indiquée par l'énoncé en posant :

— $\alpha = C_p + C_s$

— $\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}$

— $\omega_a = \sqrt{\frac{C_p+C_s}{C_pC_sL}}$

Remarque : on peut facilement se convaincre que $\omega_a > \omega_r$ (puisque $C_p + C_s > C_p$) ce qui sera utile pour la suite.

2) L'application numérique donne $f_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 796kHz$ et $f_a = 800kHz$. Ainsi on a bien $f_a > f_r$ comme prévu mais on constate aussi que ces deux fréquences sont très proches l'une de l'autre.

3) On a $Im(\underline{Z}) = \left(\frac{-1}{\alpha\omega}\right) \frac{1-\frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1-(\frac{\omega^2}{\omega_a^2})}$. On peut alors faire le tableau de signe suivant :

ω	0		ω_r		ω_a		$+\infty$
$\frac{-1}{\alpha\omega^2}$		-		-		-	
$1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}$		+		-		-	
$1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}$		+		+		-	
$Im(\underline{Z})$		-		+		-	

On sait qu'un dipôle a un comportement capacitif quand la partie imaginaire de son impédance est négative et inductif quand la partie imaginaire de son impédance est positive. Ainsi, le quartz a toujours un comportement capacitif, sauf entre les fréquences f_a et f_r (c'est à dire entre 796 et 800 kHz) où il a un comportement inductif.

La courbe de la partie imaginaire de l'impédance en fonction de la pulsation a l'allure suivante :

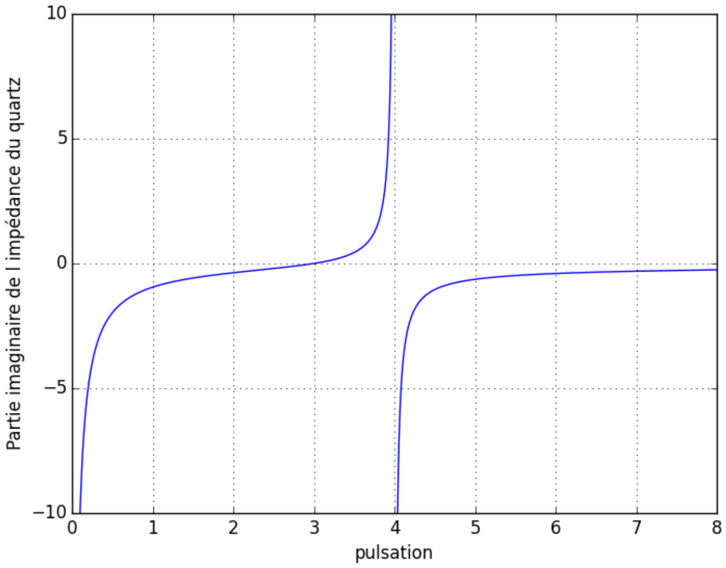


FIGURE 4 – Partie imaginaire de l'impédance du quartz en fonction de la pulsation. Pour plus de simplicité et pour que la courbe soit plus lisible, on a pris $\alpha = 1$, $\omega_r = 3$ et $\omega = 4$. On constate que l'impédance diverge en ω_a, ce qui traduit la présence d'une résonance. On notera aussi le comportement inductif entre ω_r et ω_a et capacitif partout ailleurs.

4) Il suffit d'appliquer le diviseur de tension (puisqu'aucun courant ne part vers la voie B de l'oscilloscope, celui-ci étant d'impédance quasi-infinie) pour obtenir que :

$$\underline{H} = \frac{R_v}{\underline{Z} + R_v}$$

5) Puisque $\underline{Z}$ est imaginaire pur, on a :

$$|\underline{H}| = \frac{R_v}{\sqrt{R_v^2 + Z^2}}$$

en notant $Z = |\underline{Z}|$.
Ainsi, $|\underline{H}| = \frac{1}{2}$ implique que $Z^2 = 3R_v^2$, soit $Z = \sqrt{3}R_v$. Ainsi, en faisant varier R_v jusqu'à avoir $|\underline{H}| = \frac{1}{2}$ permet de déterminer Z.

5) On sait que le facteur de qualité Q vérifie :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

où ω_0 est la pulsation de résonance en intensité et $\Delta\omega$ la largeur de la bande passante.

Comme la pulsation et la fréquence sont proportionnelles, on peut également écrire :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = \frac{796000}{50} \simeq 16000$$

On constate que le facteur de qualité est très élevé !

On obtient pour la résistance du quartz :

$$R = \frac{L\omega_0}{Q} = \frac{L \times 2\pi f_0}{Q} \simeq 160\Omega$$

7) On constate que chaque compteur modulo 2 permet de diviser par deux la fréquence du signal. Or le signal qui commande le chiffre des secondes de la montre doit avoir une fréquence de 1 Hz (puisque ce chiffre varie une fois par seconde).

Il s'agit donc de savoir combien de fois on doit diviser 32768 par deux pour avoir 1. Pour cela on résout :

$$\frac{32768}{2^k} = 1$$

qui donne :

$$k = \frac{\ln(32768)}{ln(2)} = 15$$

(ce qui signifie que $32768 = 2^15$).

Il faut donc mettre 15 compteurs modulo deux en cascade pour commander le chiffre des secondes de la montre, en partant du signal généré par l'oscillateur à quartz.

Exercice 3 : Détermination des caractéristiques d'un oscillateur :

1) On applique la deuxième loi de Newton à la masse dans le référentiel terrestre supposé Galiléen. On obtient :

$$m\vec{a} = \vec{F_R} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{R_N}$$

Or le poids et la réaction normale se compensent, et il ne reste donc que la force de rappel et la force de frottements de l'amortisseur à prendre en compte. On obtient donc, après projection sur l'axe colinéaire au ressort, et dirigé de son point fixe vers la masse :

$$m\ddot{x} = -kx - \lambda\dot{x}$$

soit encore :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

2)a) Pour résoudre l'équation différentielle précédente, on écrit son équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

de discriminant :

$$\Delta = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$$

Clairement, vu l'allure de la courbe, on est dans le régime pseudo-périodique, ce qui signifie que $\Delta < 0$ et que l'équation différentielle admet deux racines complexes :

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_p$$

en notant $\omega_p = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.
On sait alors que la solution générale de l'équation différentielle peut s'écrire :

$$x(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)$$

ou encore :

$$x(t) = X_m e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\omega_p t + \varphi)$$

Déterminons tout d'abord le facteur de qualité Q (plus Q est faible, plus les oscillations s'amortissent rapidement). On constate que le premier maximum a une valeur de 3,86 cm environ tandis que le suivant est à 0,21 cm environ.
Or :

$$\frac{x(t+T_p)}{x(t)} = e^{\frac{\omega_0 T_p}{2Q}}$$

en effet les amplitudes X_m se simplifient, ainsi que les cosinus, vu que T_p est la période du cosinus.
On peu donc prendre le logarithme et on obtient que :

$$ln(\frac{x(t+T_p)}{x(t)}) = \frac{\omega_0 T_p}{2Q} = \frac{2\pi\omega_0}{2\omega_p Q} = \frac{\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$

(remarque : cette grandeur s'appelle le "décrément logarithmique")
Ainsi :

$$\frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}} = ln(\frac{3,86}{0,21}) \simeq 2,9$$

Donc $Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{2{,}9^2} + \frac{1}{4}} \simeq 1,2$.
Déterminons à présent la pulsation ω_0.
Sur la courbe, on peut lire très facilement la pseudo-période :

$$T_p \simeq 1,15 - 0,06 = 1,09s$$

Or $T_p = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$.
On a donc $\omega_0 = \frac{2\pi}{1{,}09\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = 6,34rad/s$
(remarque : quand j'ai tracé la courbe sur Python, j'ai pris $Q = 1,2$ et $\omega_0 = 2\pi \simeq 6,28rad/s$, les valeurs obtenues sont donc très proches des valeurs exactes de Q et ω_0).

b) On déduit d'abord k de la valeur de ω_0 puisque $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc $k = \omega_0^2 m = 20,1N/m$.

Puis on déduit λ de la valeur de Q puisque $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$ donc $\lambda = \frac{\sqrt{km}}{Q} \simeq 2,6\ kg.s^{-1}$.