Correction du DS4 de Sciences Physiques

Exercice 1 : Etude d'une résistance non linéaire

1) a) Si $i = ku^n$, on a $\ln(i) = \ln(k) + n\ln(u)$, ainsi, il faut tracer $\ln(i)$ en fonction de $\ln(u)$. Si les points sont alignés, c'est que i et u sont bien liés par une loi puissance, la pente de la droite est l'exposant n, et l'ordonnée à l'origine est $\ln(k)$.

b) En choisissant les points correspondant aux tensions de 35 V, 45 V, 60 V, 80 V, 100 V et 115 V (attention à ne pas prendre des points trop proches de l'origine, pour lesquels l'incertitude relative est très grande), on obtient le graphe suivant :

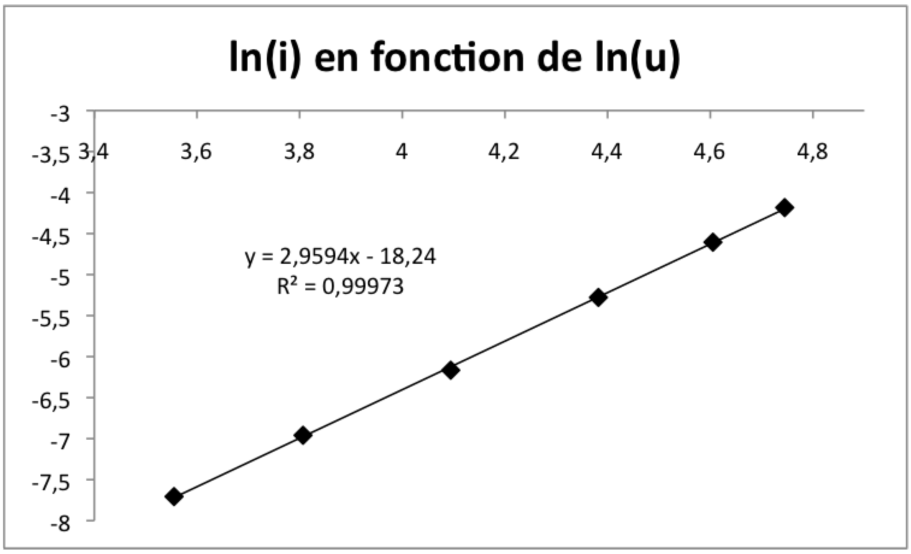


FIGURE 1 – $\ln(i)$ (où i est en A) en fonction de $\ln(u)$ (où u est en V)

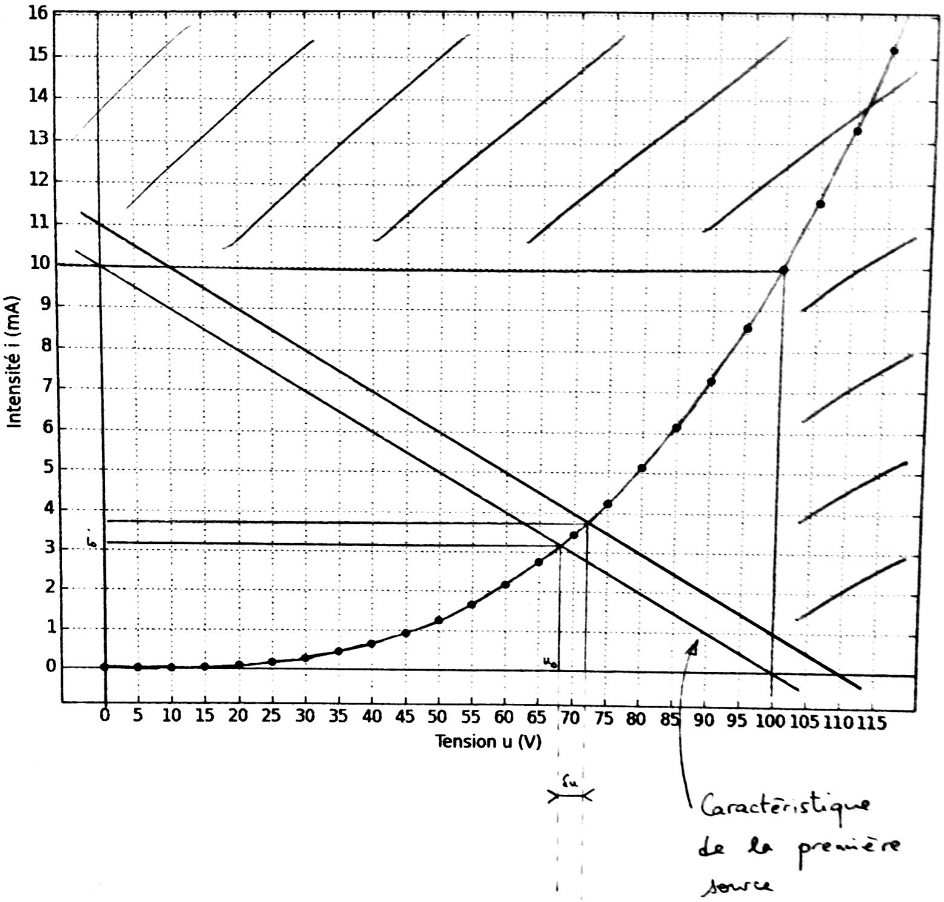
On voit que l'alignement est très bon. La pente de la courbe vaut environ 2,96, ce qui laisse supposer que $n = 3$ si on suppose que n est entier.

De plus, $k = \exp(-18,24) \simeq 1,2.10^{-8} A.V^{-3}$.

2) En convention récepteur, la puissance reçue par le dipôle est $P = ui$ donc, puisque $i = ku^n$ pour la RNL. On a donc $P = ku^{n+1}$, ainsi :

$$u_{max} = \sqrt[n+1]{\frac{P_{max}}{k}} \simeq 96V$$

ce qui correspond à une intensité $i_{max} = ku_{max}^3 = 10mA$. Voir la figure ci-dessous pour la zone de la caractéristique interdite si on ne veut pas endommager la RNL.



3)a) La caractéristique de la source réelle est :

$$u = E - Ri$$

soit, si on exprime i en fonction de u :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u}{R} = 10mA - u/R$$

Il suffit alors de superposer la caractéristique de la source (d'ordonnée à l'origine 10 mA et de pente $\frac{1}{R}$) à celle de la RNL pour déterminer le point de fonctionnement du circuit, et aisni la valeur de u_0 et i_0.

Graphiquement, on trouve $u_0 \simeq 68V$ et $i_0 \simeq 3,15mA$.

b)

$$R_S = \frac{u_0}{i_0} \simeq 21,5k\Omega$$

c) Par définition, $R_D = \left(\frac{du}{di}\right)_{i=i_0}$, or $i = ku^3$ donc $u = \frac{i^{1/3}}{k^{1/3}}$, d'où $\frac{du}{di} = \frac{1}{3k^{1/3}}i^{-2/3}$

En faisant l'application numérique, on obtient :

$$R_D \simeq 6,8k\Omega$$

4) a) Graphiquement, il suffit de tracer la caractéristique de la nouvelle source, parallèle à celle de la première (puisque la résistance interne est la même) mais d'ordonnée à l'origine 11 mA. On lit sur le graphique $\delta u \simeq 4,0V$.

b) Puisque la résistance dynamique est définie comme :

$$R_D = \frac{du}{di}$$

on a, pour des petites variations de u et de i : $\delta u = R_D \delta i$.
De plus, comme la tension aux bornes de la source réelle est la même que celle aux bornes de la RNL, on a $u = E - Ri$, soit, en différentiant :

$$\delta u = \delta E - R\delta i$$

En remplaçant δi par $\frac{\delta u}{R_D}$ dans cette expression, on obtient :

$$\delta u = \delta E - \frac{R}{R_D}\delta u$$

soit :

$$\delta u = \frac{\delta E}{1 + \frac{R}{R_D}} \simeq 4,0V$$

Il y a donc un très bon accord avec la valeur lue sur le graphique.

c) La variation relative de u vaut :

$$\frac{\delta u}{u} = \frac{4}{68} = 6\%$$

Tandis que la variation relative de la fém de la source vaut :

$$\frac{\delta E}{E} = 10\%$$

Ainsi, la tension aux bornes de la RNL est plus stable (dans le sens où ses variations relatives sont plus faibles) que celle aux bornes de la source.

Exercice 2 : Etude du flash d'un appareil photographique

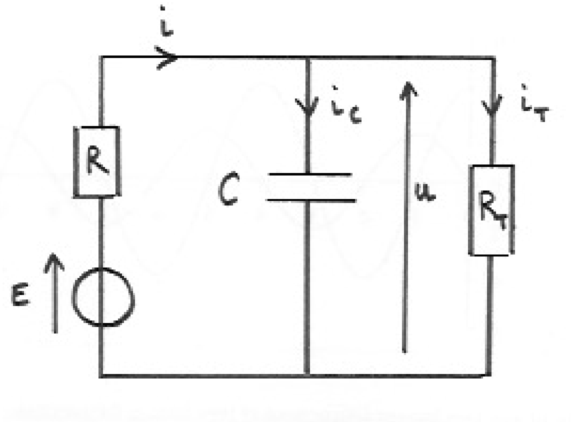


FIGURE 2 – Circuit modélisé du flash d'un appareil photographique, faisant apparaître les différentes notations utilisées par la suite.

1) a) Notons $u(t)$ la tension aux bornes du condensateur (qui est aussi la tension aux bornes de la source réelle et la tension aux bornes du tube à décharge).

À $t = 0^-$, on est en régime permanent, donc le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et (vu que K est aussi ouvert) aucun courant ne circule dans le circuit. Donc $u(0^-) = E - Ri(0^-) = E$. De plus on sait que la tension est continue aux bornes d'un condensateur donc $u(0^+) = E$.

De plus, en 0^+, K est fermé, donc $u = R_T i_T$. On en déduit immédiatement que $\boxed{i_T(0^+) = \dfrac{E}{R_T}}$.

b) En $+\infty$, on est à nouveau en régime permanent continu, donc le condensateur se comporte à nouveau comme un interrupteur ouvert. On a donc le même courant i_T qui circule dans les deux résistances. La loi des mailles donne donc : $E - Ri_T = R_T i_T$, d'où $\boxed{i_T(+\infty) = \dfrac{E}{R + R_T}}$.

2) On a, d'après la loi des mailles : $E - Ri = R_T i_T$ avec $i = i_c + i_T$ et $i_c = C\frac{du}{dt} = R_T C\frac{di_T}{dt}$ puisque $u = R_T i_T$.

On en déduit que $E - R(i_T + R_T C\frac{di_T}{dt}) = R_T i_T$, soit $RR_T C\frac{di_T}{dt} + (R + R_T)i_T = E$, ou encore $\frac{di_T}{dt} + \frac{R+R_T}{RR_T C} i_T = \frac{E}{RR_T C}$, soit :

$$\boxed{\frac{di_T}{dt} + \frac{1}{\tau} i_T = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R + R_T}}$$

3) Cette équation différentielle est linéaire, du premier ordre, non homogène.

Une solution particulière évidente est $i_{T,p} = \frac{E}{R+R_T}$.

La solution générale de l'équation homogène associée s'écrit : $i_{T,h} = \lambda \exp(-\frac{t}{\tau})$.

La solution générale de l'équation complète s'écrit donc :

$$i_T(t) = \frac{E}{R + R_T} + \lambda \exp(-\frac{t}{\tau})$$

De plus on sait que $i_T(0^+) = \frac{E}{R_T}$, d'où : $\lambda + \frac{E}{R+R_T} = \frac{E}{R_T}$, soit $\lambda = \frac{E}{R_T} - \frac{E}{R+R_T} = \frac{ER}{R_T(R+R_T)}$.

En conclusion :

$$\boxed{i_T(t) = \frac{E}{R + R_T}\left(1 + \frac{R}{R_T}\exp(-\frac{t}{\tau})\right)}$$

4) La figure 3 donne l'allure de $i_T(t)$. On voit qu'au moment de la fermeture de l'interrupteur, le courant qui traverse le tube à décharge est brièvement très intense, ce qui explique la génération d'un éclair lumineux.

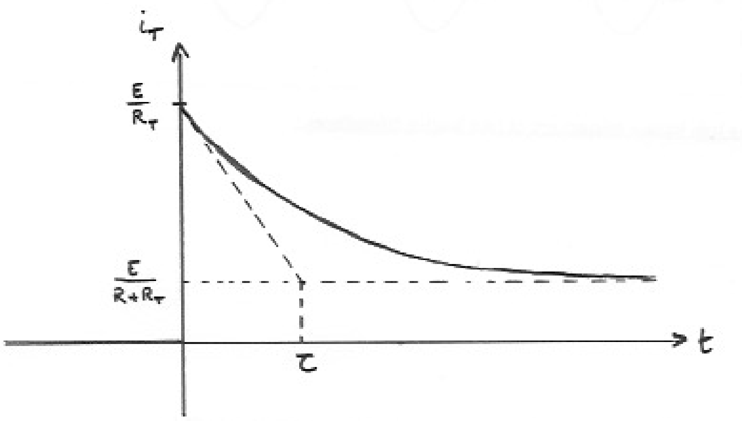


FIGURE 3 – Allure de i_T en fonction du temps

5) a) Avant fermeture de l'interrupteur, on a vu que la tension aux bornes du condensateur vaut $u = E$, on en déduit l'énergie accumulée dans le condensateur :

$$E_c = \frac{1}{2}CE^2$$

b) L'énergie totale consommée par un flash ui fonctionne pendant $\Delta t = 0,10s$ et consomme une puissance moyenne $P_{moy} = 4,0W$ vaut : $E_{tot} = P_{moy} \times \Delta t = 0,4J$.

c) Cette énergie est fournie par le condensateur.

On a donc :

$$P_{moy} \times \Delta t = \frac{1}{2}CE^2$$

d'où :

$$C = \frac{2P_{moy} \times \Delta t}{E^2} = \frac{0,8}{9 \times 10^4} = 8,9\mu F$$

Cette valeur de capacité paraît tout à fait raisonnable (bien que plutôt élevée, les capacités que nous utilisons en TP variant en général du pico-Farad au micro-Farad).

Exercice 3 : Circuit LC idéal et réel

1) $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes du condensateur et de la bobine. Définissons une intensité du courant $i(t)$ que nous prendrons (de façon arbitraire) "vers le haut" dans le condensateur et "vers le bas" dans la bobine (ainsi le condensateur est représenté en convention générateur et la bobine en convention récepteur). On a alors :

$$u = L\frac{di}{dt}$$

et

$$i = -C\frac{du}{dt}$$

En combinant ces deux équations, on obtient l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

en posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

2) On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0. On sait que la solution générale est de la forme :

$$u(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On sait que $u(0^-) = E$, or la tension aux bornes d'un condensateur est toujours continue, donc $u(0+) = E$, on en déduit que $A = E$.

De plus, le courant qui traverse la bobine étant également continu, on a $i(0^+) = i(0-) = 0$. Or on a vu que $i = -C\frac{du}{dt}$ donc $\frac{du}{dt}(0+) = 0$. Or $\frac{du}{dt} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$. On en déduit que $B = 0$.

Ainsi,

$$u(t) = E\cos(\omega_0 t)$$

3) Quand on connecte le condensateur à la bobine, celui-ci se décharge (i.e. les électrons accumulés sur une armature vont rejoindre les charges positives accumulées sur l'autre). Quand la décharge est terminée, le courant devrait s'arrêter, mais la bobine, qui a tendance à s'opposer aux variations du courant, maintient un courant dans le circuit (un peu comme l'inertie dans un oscillateur mécanique), ce qui a pour effet de re-charger le condensateur (de façon opposé à sa charge initiale). Il se décharge alors à nouveau, et ainsi de suite, ce qui explique les oscillations.

4) On a maintenant d'après la loi des mailles (en prenant toujours le meme sens pour le courant) :

$$u(t) - Ri - L\frac{di}{dt} = 0$$

Or $i = -C\frac{du}{dt}$ donc, après simplification :

$$\frac{d^2}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0$$

ou encore :

$$\frac{d^2}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}+\omega_0^2 u=0$$

en posant $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}=10^6 rad/s$ et $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=100$.

5)a) On a affaire à une équation différentielle du second ordre, linéaire et homogène, à coefficients constants. Son équation caractéristique est :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta=\omega_0^2(\frac{1}{Q^2}-4)$$

$\Delta<0$ puisque $Q>1/2$, ainsi l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées :

$$r_{1,2}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm i\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q^2}}=-\frac{\omega_0}{2Q}\pm i\omega_p$$

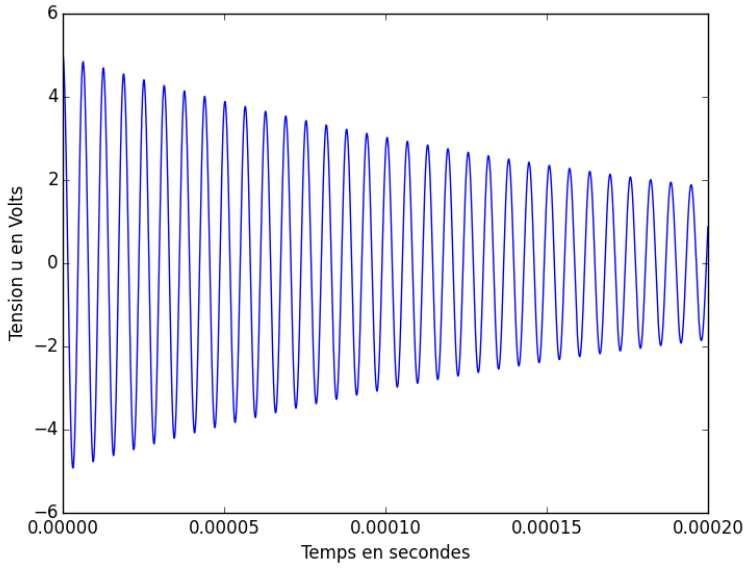
en notant $\omega_p=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{Q^2}}$ la "pseudo-pulsation".
On sait alors que la solution générale de l'équation différentielle s'écrit :

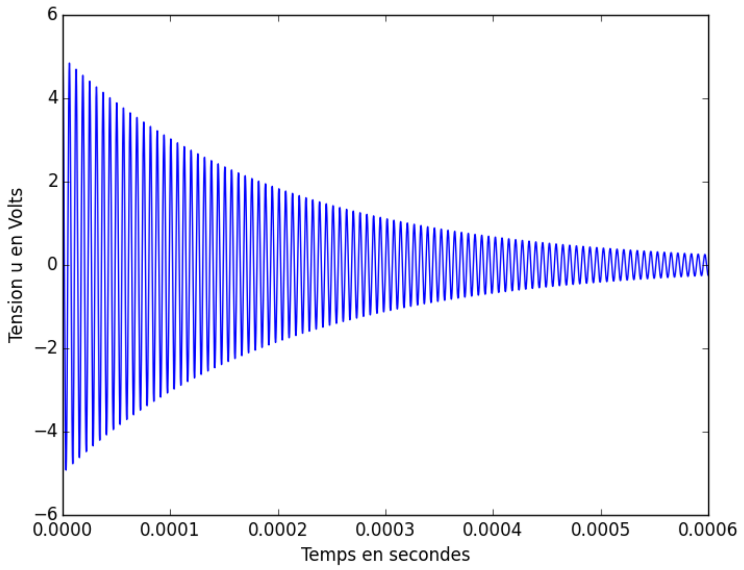
$$u(t)=e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\omega_p t)+B\sin(\omega_p t))$$

Les conditions initiales sont toujours $u(0^+)=E$ et $\frac{du}{dt}(0^+)=0$.
La première implique que $A=E$ tandis que la deuxième implique que $B=\frac{\omega_0}{2Q\omega_p}A$.
On a donc :

$$u(t)=Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(\cos(\omega_p t)+\frac{\omega_0}{2Q\omega_p}\sin(\omega_p t))$$

Le tracé de cette fonction avec Python (en prenant les valeurs de ω_O et de Q que l'on a calculées et $E=5V$) donne les courbes ci-dessous (la première est sur un intervalle de temps plus court que la seconde, pour mieux voir les détails). On remarque que la décroissance est très lente, ce qui est normal vu la valeur très élevée du facteur de qualité ($Q=100$).





b) La pseudo-période est $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = 6,3\mu s$.

Ici, la pseudo-période est quasi-égale à la période propre car $Q >> 1$ donc $\omega_p \simeq \omega_0$.

c) Pour cette question, il faut étudier *l'enveloppe* de la courbe, i.e. la fonction $Ee^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$. En pratique, il suffit de chercher le temps t tel que :

$$e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} = 0,05$$

ce qui donne :

$$t = -\frac{2Q}{\omega_0}\ln(0,05) \simeq 6,0.10^{-4}s$$

(ce qui, au passage, est cohérent avec la courbe de la question précédente).

d) Sachant qu'une pseudo-pulsation dure $6,3\mu s$, il a fallu $\frac{6,0.10^{-4}}{6,3.10^{-6}} \simeq 95$ oscillations pour atteindre le régime permanent (à 95% près).

On retrouve donc le résultat annoncé dans le cours : Q correspond (approximativement) au nombre de pseudo-oscillations qui ont lieu pendant le régime transitoire.

Exercice 4 : Mesure d'une résistance

1) Notons I le courant mesuré par l'ampèremètre et U la tension mesurée par le voltmètre. La valeur mesurée de la résistance sera donc $R_{mes} = \frac{U}{I}$.

R_{mes} n'est cependant pas égal à R car le courant I n'est pas exactement égal au courant qui circule dans la résistance R puisqu'un peu de courant va circuler dans le voltmètre.

Plus, précisément, on a, d'après la loi des noeuds :

$$I = \frac{U}{R} + \frac{U}{R_V}$$

Ainsi :

$$R_{mes} = \frac{U}{I} = \frac{U}{\frac{U}{R} + \frac{U}{R_V}} = \frac{R}{1 + \frac{R}{R_V}}$$

2) Notons toujours I le courant mesuré par l'ampèremètre et U la tension mesurée par le voltmètre. On a donc toujours $R_{mes} = \frac{U}{I}$.

Ici l'ampèremètre mesure bien le courant qui circule dans la résistance R mais l'erreur vient du fait que le voltmètre mesure la tension totale aux bornes de l'ampèremètre et de la résistance, soit $U = RI + R_A I$.

On en déduit que, dans le montage longue dérivation :

$$R_{mes} = R + R_A$$

3) Il est facile de voir avec les formules précédentes que :

- si la résistance à mesurer est faible (devant la résistance interne du voltmètre), il faudra utiliser un montage courte dérivation (pour lequel on aura $R_{mes} \simeq R$ puisque $1 + \frac{R}{R_V} \simeq 1$
- si la résistance à mesurer est grande (devant la résistance interne de l'ampèremètre), il faudra utiliser le montage longue dérivation puisqu'on aura $R_{mes} = R + R_A \simeq R$.

Remarque : Pour des résistances "usuelles" (comprise entre la centaine d'Ohms et la centaine de $k\Omega$), on pourra utiliser n'importe lequel des deux montages sans se faire de souci. Par contre, pour des résistances particulièrement petites (de l'ordre de quelques Ohms), il faudra impérativement utiliser un montage courte dérivation, tandis que pour des résistances particulièrement grandes (de l'ordre du $M\Omega$), il faudra impérativement utiliser un montage longue dérivation.