Correction du devoir surveillé de sciences physiques n°1

Exercice 1 : Oscillations d'une masse sur un ressort vertical :

1) Lorsque la masse est à l'équilibre, on peut écrire, d'après la seconde loi de Newton, que la somme des forces qui lui sont appliquées (c'est à dire son poids et la force de rappel du ressort) est nulle.

On a donc :

$$-mg\vec{u_x} - k(l_{eq} - l_0)\vec{u_x} = \vec{0}$$

ce qui donne, après projection sur $\vec{u_x}$ et simplification :

$$l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

Vérifions rapidement l'homogénéité :

- l_0 est en m
- l_{eq} est en m
- mg est en N (c'est une force) et k en $N.m^{-1}$ donc $\frac{mg}{k}$ est en m

Le résultat est donc homogène.

On peut vérifier aussi que le signe "moins" est cohérent : comme la masse appuie sur le ressort, l_{eq} doit être inférieur à l_0.

De plus, si m augmente, l_{eq} doit diminuer (ce qui est bien le cas avec la formule) et si k augmente (c'est à dire que le ressort devient plus raide), l_{eq} doit augmenter, ce qui est également en accord avec la formule.

Ainsi, la formule est homogène et semble cohérente. Evidemment, ça ne prouve pas qu'elle est correcte, mais c'est encourageant.

2) Appliquons la seconde loi de Newton à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_R}$$

soit :

$$\ddot{x}\vec{u_x} = -mg\vec{u_x} - k(l - l_0)\vec{u_x}$$

ou encore, en projection sur $\vec{u_x}$:

$$m\ddot{x} = -mg - k(l - l_0)$$

De plus, on a $x = l - l_{eq}$, donc $l - l_0 = (l - l_{eq}) + (l_{eq} - l_0) = x - \frac{mg}{k}$ (d'après la question précédente). Ainsi :

$$m\ddot{x} = -mg - k(x - \frac{mg}{k})$$

Après simplification, on obtient bien :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

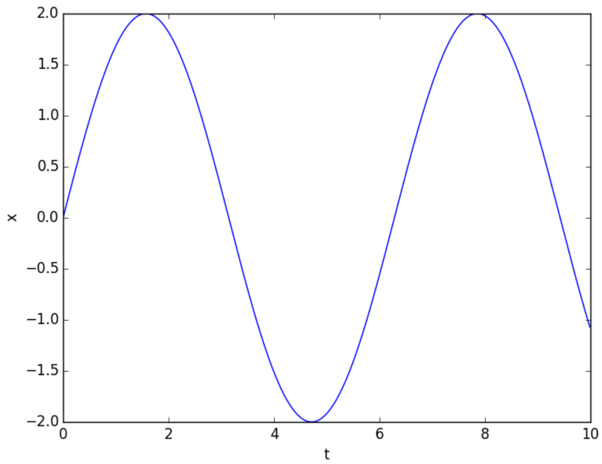
3) On a vu en cours que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

De plus, $x(0) = 0$ puisque la masse est initialement à l'équilibre, donc $A = 0$.
D'autre part, $\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, donc, en appliquant en $t = 0$: $\dot{x}(0) = B\omega_0$. Or, d'après l'énoncé, $\dot{x}(0) = v_0$, donc : $B = \frac{v_0}{\omega_0}$.
On en déduit que :

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$

4) $x(t)$ aura donc l'allure suivante :



De plus, on sait que la période de la fonction $\sin(\omega_0 t)$ est $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$, donc la période des oscillations est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

5) L'énergie mécanique est donnée par :

$$E_m = E_c + E_p$$

où il faut tenir compte ici de l'énergie potentielle élastique et de l'énergie potentielle de pesanteur.
Ainsi :

$$
\begin{aligned}
E_m &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + mgx \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - \frac{mg}{k})^2 + mgx \\
&= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 - mgx + \frac{m^2g^2}{2k} + mgx \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2\cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}k\frac{v_0^2}{\omega_0^2}\sin^2(\omega_0 t) + \frac{m^2g^2}{2k} \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2(\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) + \frac{m^2g^2}{2k} \\
&= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{m^2g^2}{2k}
\end{aligned}
$$

ce qui montre bien que l'énergie mécanique du système (masse + ressort) reste constante au cours du mouvement. On retrouve donc bien le fait que l'énergie mécanique se conserve en l'absence de frottements.

6)a) On a vu à la question 1) que lorsqu'on pose une masse m sur un ressort de raideur k, son élongation à l'équilibre vaut (en valeur absolue) : $|l_{eq} - l_0|\frac{mg}{k}$. Ainsi, $k = \frac{mg}{|l_{eq}-l_0|}$.
Donc, pour que l'élongation ne dépasse pas 10 cm si la masse vaut 1,5 tonnes, il faut que la constante de raideur soit au moins égale à :

$$k = 1,5.10^5 N.m^{-1}$$

(valeur à comparer aux ressorts de raideur $k \simeq 10N/m$ que l'on a utilisé en TP).

b) Il paraît assez évident (et cela peut se démontrer facilement) que quatre ressorts en parallèle, chacun de raideur k', se comportent comme un unique ressort de raideur $k = 4k'$. Ainsi, la raideur de chacun de quatre ressorts qui constituent la suspension devra valoir au minimum :

$$k' = 3,7.10^4 N.m^{-1}$$

c) D'après la formule de la question 4, on aura :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 0,63s$$

Remarque : en pratique, ces oscillations s'arrêteront très rapidement car les suspensions de voitures sont munies d'amortisseurs qui permettent d'arrêter rapidement les oscillations (grâce à des frottements fluides).

Exercice 2 : Enregistrement d'interférences sonores :

1) Les ondes de même fréquence venues des deux haut-parleurs vont inteférer. Il y aura donc des zones de l'espace où le signal sera très fort et d'autres où il sera faible.

Plus précisément, en O, comme la différence de marche entre les deux ondes est nulle, les interférences seront constructives et le micro enregistrera donc un signal de forte amplitude. En se décalant vers la droite, l'amplitude du signal va diminuer jusqu'à devenir très faible à l'endroit où les interférences seront destructives. Si l'on continue de se décaler, l'amplitude ré-augmentera, et ainsi de suite.

2) Notons H_2 le projeté orthogonal de E_2 sur l'axe (Ox) et H_1 le projeté orthogonal de E_1 sur l'axe (Ox), et M la position du micro.

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ME_2H_2 donne :

$$r_2^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$$

De même, avec le triangle ME_1H_1 on obtient :

$$r_1^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

En faisant la différence de ces deux équations, on a :

$$r_1^2 - r_2^2 = 2ax$$

Soit :

$$(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 2ax$$

Or, comme $D >> a$, on a $r_1 + r_2 \simeq 2D$, donc la différence de marche peut s'écrire :

$$r_1 - r_2 \simeq \frac{ax}{D}$$

3) Le signal enregistré sera d'amplitude minimale lorsque les interférences seront destructives, c'est à dire lorsque la différence de marche sera égale à une demi longueur d'onde plus un multiple entier de la longueur d'onde, c'est à dire lorsque :

$$r_1 - r_2 = \frac{\lambda}{2} + n\lambda, n \in \mathbb{N}$$

soit, d'après la question précédente :

$$\frac{ax}{D} = \frac{\lambda}{2} + n\lambda, n \in \mathbb{N}$$

On en déduit que les positions x_n où le signal sera d'amplitude minimale sont données par :

$$x_n = \frac{\lambda D}{2a} + n\frac{\lambda D}{a}, n \in \mathbb{N}$$

L'interfrange est la distance entre deux endroits où l'amplitude est minimale (ou maximale, cela revient au même), donc :

$$i = x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda D}{a}$$

Ici $\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{345}{440} = 78cm$, donc $i \simeq 15m$.

Remarque : Cet interfrange est très grand, ce qui rend l'expérience difficilement réalisable (à moins de disposer d'un énorme pièce) et, surtout, l'approximation $r_1 + r_2 \simeq 2D$ invalide, puisqu'elle nécessite également que $D >> x$. Il faudrait donc plutôt travailler avec des ultrasons (de fréquence par exemple 40 kHz) pour avoir une interfrange de quelques centimètres.

4) a) Pour cette question, où il s'agit de redémontrer la formule des interférences, on peut reprendre la démonstration "directe" du cours, ou, pour plus de rapidité, utiliser la réprésentation de Fresnel. Ici, comme l'amplitude des deux signaux est la même, on peut même également trouver directement le résultat grâce à une formule de trigonométrie.

En effet, la surpression totale s'écrit :

$$\begin{aligned} p(t) &= p_1(t) + p_2(t) \\ &= A_0(\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)) \\ &= 2A_0 \cos(\frac{\omega t + \varphi_1 - (\omega t + \varphi_2)}{2}) \cos(\frac{\omega t + \varphi_1 + \omega t + \varphi_2}{2}) \\ &= 2A_0 \cos(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) \cos(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}) \end{aligned}$$

ce qui montre que l'amplitude de la surpression totale est :

$$A = 2A_0 \left| \cos(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}) \right|$$

Remarque : avec la formule "habituelle" on aurait eu :

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} = \sqrt{2}A_0\sqrt{1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

ce qui redonne bien la formule précédente, d'après la formule de trigonométrie $1 + \cos(x) = \cos^2(x/2)$.

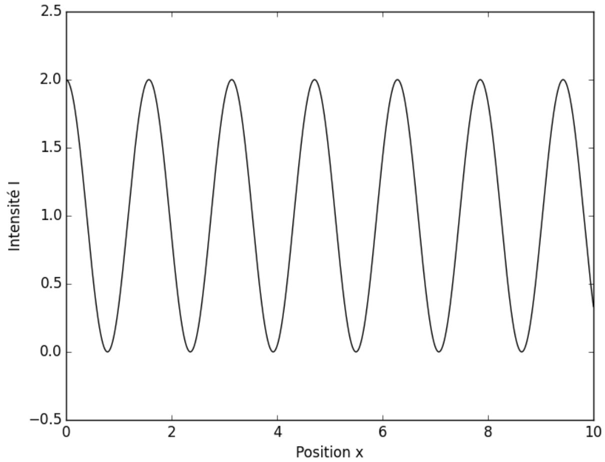
b) On a vu en cours que le déphasage est relié à la différence de marche par :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x$$

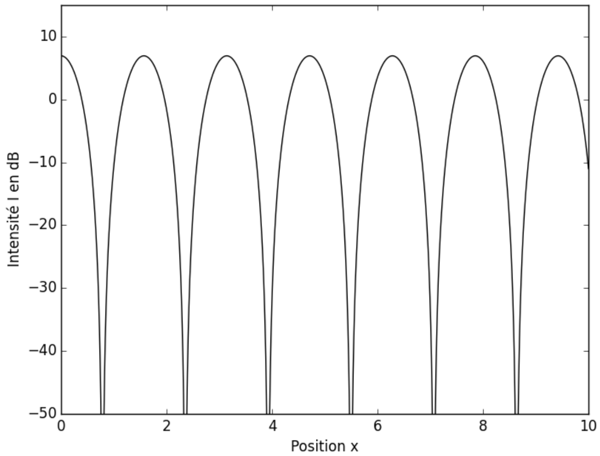
ainsi, $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{ax}{D}$.
On obtient donc que :

$$I(x) = 4KA_0^2 \cos^2(\frac{\pi a x}{\lambda D}) = 2KA_0^2(1 + \cos(\frac{2\pi a x}{\lambda D}))$$

Cette fonction a l'allure suivante :



c) La fonction $I_{dB}(x)$ a l'allure suivante :



Exercice 3 : Effet Doppler et radars routiers :

1) L'effet Doppler est le décalage de fréquence entre l'onde émise par un émetteur et l'onde reçue par un récepteur, lorsque l'émetteur et le récépteur se déplacent l'un par rapport à l'autre.

2) Supposons qu'à $t = 0$, S et R sont séparés d'une distance D et que S émet un premier front d'onde. Ce front d'onde sera reçu par R à l'instant $t_1 = \frac{D}{c}$.

À $t = T_e$, la source émet un second front d'onde. Comme elle se déplace vers le récepteur à la vitesse v, elle n'est alors séparée de lui que d'une distance $D - vT_e$. Le récepteur détectera donc ce second front d'onde à un instant $t_2 = T_e + \frac{D-vT_e}{c}$.

La période mesurée par le récépeteur sera donc :

$$T_r = t_2 - t_1 = T_e(1 - \frac{v}{c})$$

soit, en terme de fréquence :

$$f_r = \frac{f_e}{1 - \frac{v}{c}}$$

On constate donc que si la source de rapproche du récepteur, la fréquence reçue est supérieure à la fréquence émise, ce qui est cohérent.

3) Les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière. On aura donc :

$$\lambda = \frac{c}{f} \simeq \frac{3,0.10^8}{24.10^9} \simeq 1,2cm$$

On est dans le domaine des *micro-ondes* (entre l'infra-rouge et les ondes radio).

4) D'après la formule donnée par l'énoncé, on a :

$$\frac{f_r - f_e}{f_e} = \frac{2v/c}{1 - \frac{v}{c}} \simeq \frac{2v}{c}$$

puisque $1 - \frac{v}{c} \simeq 1$ si $v << c$.

L'application numérique avec $v = 130 km/h \simeq 36 m/s$ et $c = 3,0.10^8 m/s$ donne :

$$\frac{f_r - f_e}{f_e} \simeq 2,4.10^{-7} \simeq 2,4.10^{-5}\%$$

Ainsi, la variation de fréquence due à l'effet Doppler que le radar doit détecter est égale à seulement $0,000024\%$ de la fréquence du signal envoyé. Il peut donc sembler impossible de détecter une variation aussi infime !

5) La courbe obtenue traduit le phénomène de *battements*, qui se produit lorsque deux signaux de fréquences voisines se superposent.

Plus précisément, étudions ce qui se passe lorsque l'on somme un signal de fréquence ω_1 et un signal de fréquence ω_2 très proche (on prendra les deux signaux de même amplitude et phase initiale nulle pour simplifier). Le signal total s'écrit :

$$s(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t) = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

Le premier des deux cosinus a une pulsation très faible puisque $\omega_1 \simeq \omega_2$ et donc une très grande période : il correspond à l'enveloppe de la courbe. Le second cosinus, de pulsation élevée et petite période, correspond aux variations rapides à l'intérieur de l'enveloppe.

On mesure sur la figure 6 une période de l'enveloppe égale à $T' = 0,00030 s$ (attention à bien mesurer la période de l'enveloppe, et pas sa demi-période).

Ainsi, $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \frac{2\pi}{T'}$ donc, puisque $f = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$f_r - f_e = \frac{2}{T'} \simeq 6,7 kHz$$

Or $\frac{2v}{c} = \frac{f_r - f_e}{f_e}$ donc $v = \frac{c}{2} \frac{f_r - f_e}{f_e} \simeq 42 m/s \simeq 150 km/h$. La voiture contrôlée est donc en excès de vitesse !

Exercice 4 : Instruments de musique :

1)a) L'écriture mathématique générale d'une onde stationnaire sur la corde est :

$$y(x,t) = A \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \tag{1}$$

avec $k = \omega / c$.

b) Puisque $y(0,t) = 0$, $\forall t$, on a : $\forall t$, $A \cos(\omega t + \varphi) \cos(\psi) = 0$, ce qui n'est possible que si $\cos(\psi) = 0$, c'est à dire si $\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

L'autre condition aux limites (en $x = L$), impose alors que $\cos(kL + \psi) = 0$, soit $kl + \psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$ et donc $kL = 0[\pi]$, ou encore $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (en théorie n est un entier relatif, mais comme k et L sont positifs, n doit l'être aussi).

Ainsi, les différentes ondes stationaires pouvant exister sur la corde auront pour pulsations spatiales : $k_n = \frac{n\pi}{L}$, et donc pour pulsation temporelle $\omega_n = \frac{k_n}{c} = \frac{n\pi}{Lc}$ et donc pour fréquence : $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L}$.

c) Voir la figure 1

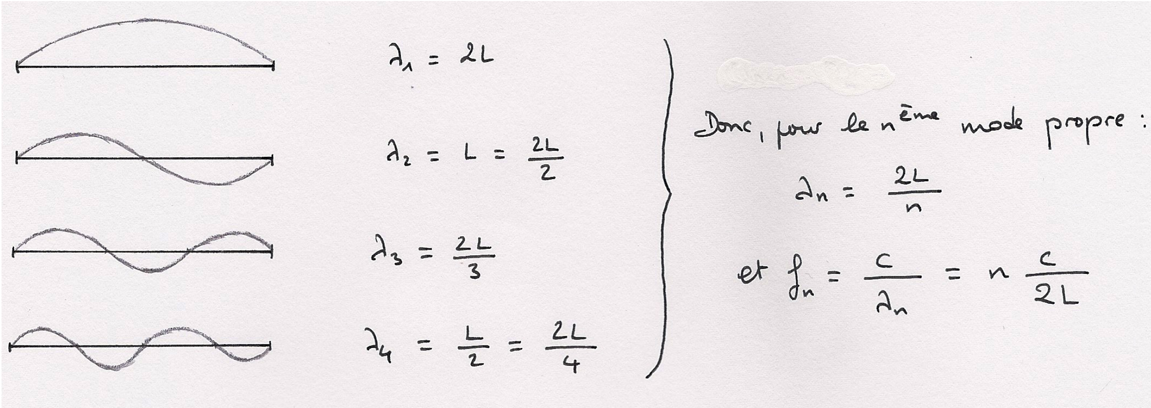


FIGURE 1 – Les quatre premiers modes propres de vibration d'une corde

c) La forme générale d'une onde sur la corde sera une superposition de modes propres, donc de la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x + \psi_n)\cos(\frac{n\pi}{Lc}t + \varphi_n)$$

ce que l'on peut également écrire, vu que $\psi_n = \frac{pi}{2}[\pi]$:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)\cos(\frac{n\pi}{Lc}t + \varphi_n)$$

où les a_n et les φ_n dépendent des conditions initiales (i.e. la façon dont la corde a été excitée).

2)a) La partie de gauche de la figure 2 montre les trois premiers modes propres d'un tuyau sonore fermé à une extrémité et ouvert à l'autre.

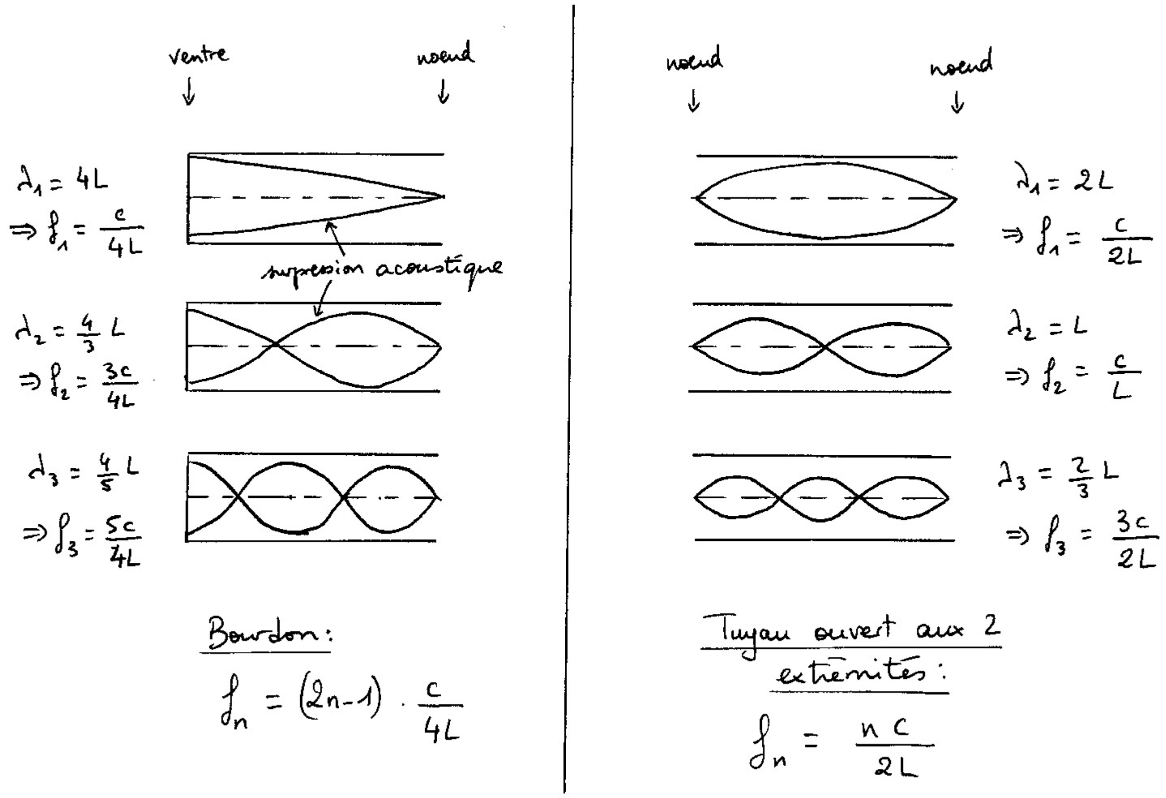


FIGURE 2 – Comparaison des trois premiers modes propres d'un tuyau ouvert aux deux extrémités (à droite) et d'un tuyau ouvert d'un côté et fermé de l'autre (à gauche).

On voit que les fréquences émises par le tutau sont données par :

$$f_n = (2n-1)\frac{c}{4L},\ n \in \mathbb{N}*$$

b) La note émise par le tuyau est donnée par la fréquence du fondamental, soit, d'après la question précédente : $f_1 = \frac{c}{4L}$, où $c \simeq 345 m/s$ est la vitesse du son dans l'air puisque c'est une onde sonore qui règne dans le tuyau.

Ainsi :

$$L = \frac{c}{4f_1} = 1,32\ m$$

(c'est très grand mais certains tuyaux d'orgue font effectivement cette taille).

c) D'après la question 2)a) on voit que seuls les harmoniques de rang impair seront présents dans le spectre du tuyau fermé à une extrémité. Le spectre aura donc l'allure suivante :

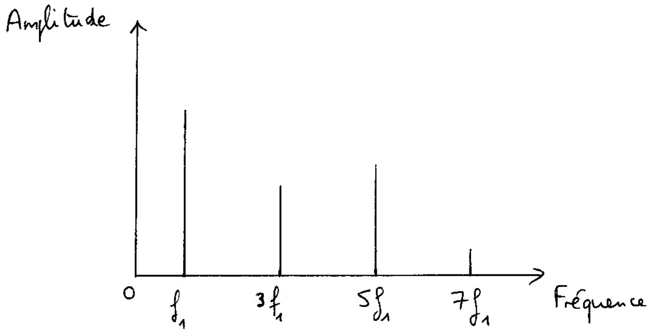


FIGURE 3 – Allure du spectre d'un tuyau ouvert à une extrémité et fermé à l'autre.

Questions de cours sur la lumière :

1) Ils avaient tous les deux raisons (ou, si l'on préfère voir le verre à moitié vide qu'à moitié plein : ils avaient tous les deux tort). On sait aujourd'hui que la lumière se comporte parfois comme une onde (diffraction, interférences) et parfois comme un corpuscule (effet photoélectrique, rayonnement du corps noir).

2) Dans l'eau :

— la célérité de l'onde devient $\frac{c}{n} \simeq 2,26.10^8 m/s$
— sa fréquence reste inchangée
— comme $\lambda = \frac{c}{f}$, sa longueur d'onde est divisée par n et devient donc $391nm$
— bien que cette longueur d'onde correspondrait, dans le vide, à une lumière violette, c'est la fréquence de l'onde qui impose la couleur que l'on perçoit, et donc la lumière est toujours verte.

3) Le soleil, les bougies et les lampes à incandescence reposent sur le principe de l'émission thermique. Le spectre de la lumière issue de ces sources sera *continu.*

4) Dans les deux cas (émission stimulée ou spontanée), un atome, initialement dans un état excité, se désexcite (c'est à dire passe dans un état d'énergie inférieure, éventuellement l'état fondamental) en émettant un photon.

Pour l'émission spontanée, l'atome se désexcite spontanément, sans aide du milieu extérieur, tandis que pour l'émission stimulée, la désexcitation est provoquée par l'arrivée sur l'atome d'un photon de même énergie que la différence entre les niveaux d'énergie atomique.

Les diodes électro-fluorescentes ou les lampes spectrales utilisent l'émission spontanée tandis que les LASERs reposent sur l'émission stimulée.

5) L'énergie du photon émis doit être égale à l'énergie perdue par l'atome. Or on sait que l'énergie d'un photon de fréquence ν vaut $h\nu$ où h est la constante de Planck.

Donc :

$$E' - E = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$

ainsi, la longueur d'onde du photon est donnée par :

$$\lambda = \frac{hc}{E' - E} \simeq 6,5\mu m$$

On est dans le domaine des Infra-Rouges.

6) Le fait que l'eau soit un milieu "dispersif" signifie que l'indice de réfraction n de l'eau dépend de la longueur d'onde de la lumière. Ainsi, les différentes longueurs d'ondes ne seront pas réfractées tout à fait dans la même direction, ce qui va légèrement "disperser" la lumière blanche et faire apparaître les différentes couleurs qui la composent.

Les couleurs que l'on voit lors d'un arc-en-ciel s'expliquent par le caractère dispersif de l'eau.