Correction du DM6 de Sciences Physiques

Exercice 1 : Marseille - Varna :

1) La distance entre Marseille et Varna, en suivant le parallèle qui passe (approximativement) par ces deux villes (à la latitude de $\lambda = 43,33°$) est donnée par :

$$D = R_T \cos(\lambda) \times \Delta\varphi$$

où $\Delta\varphi$ représente la différence de longitude entre ces deux villes (en effet, D représente la longueur d'un arc de cercle de rayon $R_T \cos(\lambda)$ et d'angle au centre $\Delta\varphi$).

Pour connaître la différence de longitude entre ces deux villes, on remarque que (en tenant compte du décalage horaire), le soleil se lève 1 h 30 min plus tôt à Varna qu'à Marseille. De plus, on sait que, dans le référentiel terrestre, le soleil met 24h pour faire un tour complet autour de la terre (et que son mouvement est uniforme). Ainsi, une simple règle de trois donne :

$$\Delta\varphi = 2\pi \times \frac{1h\ 30min}{24h} = 0,393\ rad$$

En remplaçant dans la formule donnée au début, on obtient : $D \simeq 1820km$

2) En fait, en faisant avec Google Maps, je viens d'obtenir rigoureusement le même résultat, ce qui ne me permet pas d'illustrer très clairement le point que je voulais montrer ;) Ceci est sans doute dû au fait que Google Maps utilise une valeur légèrement différente du rayon de la terre que celle que j'ai donnée dans l'énoncé, ou, plus vraisemblablement, que Google Maps tient conte du fait que la Terre n'est pas une sphère mais un ellipsoïde (i.e. une sphère légèrement aplatie), ce qui doit venir compenser l'effet que je voulais illustrer.

Figure 1 – Capture d'écran de Google Maps

L'idée était de montrer que suivre le parallèle commun à Marseille et Varna n'est pas en réalité le trajet le plus court entre ces deux villes ! En effet, le chemin le plus court entre deux points d'une sphère consiste à suivre un "grand cercle", c'est à dire un cercle passant par ces deux points et *ayant pour centre le centre de la terre*. Or le parallèle commun à Marseille et Varna n'a pas pour centre le centre de la Terre (mais le projeté orthognal d'une de ces villes sur l'axe de rotation de la Terre). Je n'ai pas de démonstration rigoureuse du fait que le grand cercle est le chemin le plus court (et je n'ai pas le temps d'y réfléchir tout de suite) mais je vous propose cette "pseudo-justification" :

— Si les deux villes sont toutes deux sur l'équateur, il paraît complètement évident que le chemin le plus court consiste à suivre l'équateur (toute déviation apparaîtrait assez clairement comme "un détour")

— Si les deux villes ne sont pas sur l'équateur, la situation est en fait rigoureusement la même, à condition de remplacer "plan de l'équateur" par "plan contenant ces deux villes et le centre de la sphère" (si ce n'est pas clair, imaginez que vous pouvez toujours faire tourner la sphère de façon à ce que les deux villes appartiennent au nouvel "équateur").

3) D'après ce qui a été dit dans la question prédédente, le trajet le plus court consiste à suivre le grand cercle qui passe par A et B. On aura donc :

$$D_{min} = R_T \times \phi$$

Où ϕ est l'angle entre les vecteurs positions des deux villes (i.e. les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$).

Pour calculer cet angle, exprimons les coordonnées du vecteur position $\vec{r}$ d'un point M de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) dans la base de projection $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ des coordonnées cartésiennes.

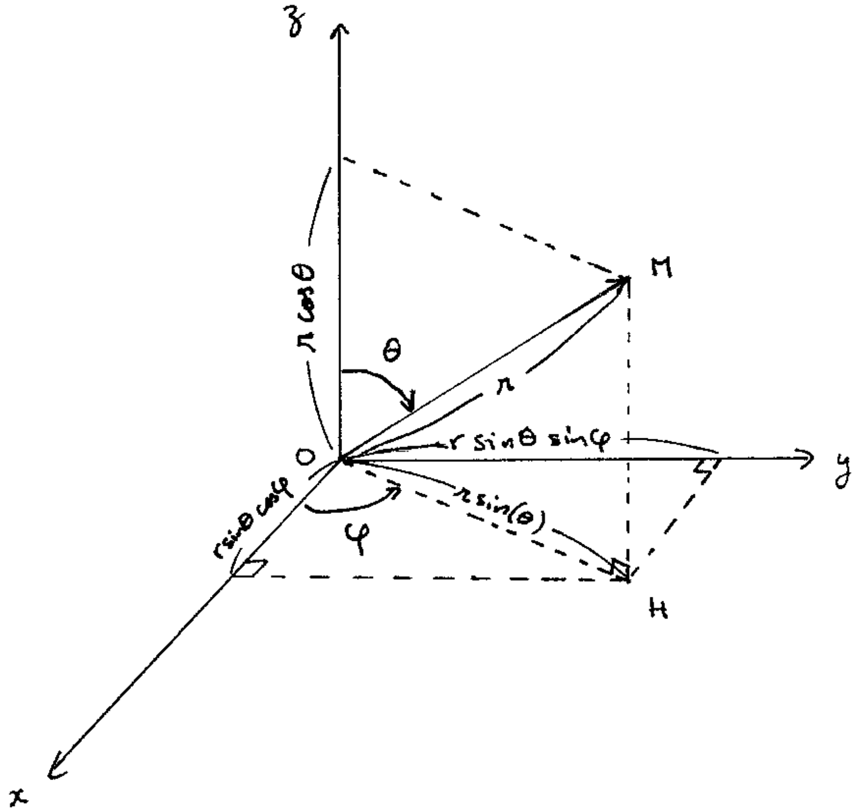

FIGURE 2 – Expression des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées sphériques

Comme le montre le schéma, on a :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On peut alors calculer le produit scalaire entre les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= R_T^2(\sin(\theta_A)\cos(\varphi_A)\sin(\theta_B)\cos(\varphi_B) + \sin(\theta_A)\sin(\varphi_A)\sin(\theta_B)\sin(\varphi_B) + \cos(\theta_A)\cos(\theta_B)) \\ &= R_T^2(\sin(\theta_A)\sin(\theta_B)\cos(\varphi_A - \varphi_B) + \cos(\theta_A)\cos(\theta_B)) \end{aligned}$$

Or on sait (par définition du produit scalaire, que : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{OB}\|\cos(\phi) = R_T^2\cos(\phi)$ (où ϕ est l'angle entre ces deux vecteurs).

En identifiant les deux expressions, on obtient que :

$$\phi = \arccos(\sin(\theta_A)\sin(\theta_B)\cos(\varphi_A - \varphi_B) + \cos(\theta_A)\cos(\theta_B))$$

4) En utilisant la formule précédente, avec $\theta_A = \theta_B = 90 - 43,33 = 46,67°$ et $\varphi_1 - \varphi_B = \Delta\phi = 0,393rad = 22,5°$ (calculé à la question 1), on obtient un angle :

$$\phi = 16,3° = 0,285rad$$

D'où une distance à vol d'oiseau entre ces deux villes : $D_{min} = 1814km$.

Pour une raison mystérieuse, cette valeur est légèrement plus éloignée de celle de Google Maps que celle obtenue en suivant le parallèle. On peut cependant remarquer que l'écart de seulement 5 km obtenu n'est pas du tout significatif (la superficie de Marseille est de 240 km^2, soit l'équivalent d'un carré de $15km \times 15km$).

5) On obtient pour la colatitude et la longitude de Marseille : $\theta_M = 46,7°$ et $\varphi_M = 5,37°$.

Et pour Sydney : $\theta_S = 123,85°$ (attention, Sydnay étant dans l'hémisphère sud, on a $\theta = 90° + \lambda$ et non pas $\theta = 90° - \lambda$ comme dans l'hémisphère nord) et $\varphi_S = 151,2°$.

En appliquant la formule de la question 3, on obtient donc un angle entre les vecteurs position de ces deux villes de $\phi = 151,9° = 2,65rad$.

Remarque : on dit parfois que l'Australie est aux antipodes de la France. On voit par ce calcul que ce n'est pas exactement le cas (puisque ϕ ne vaut pas 180° mais pas loin.

En multipliant ensuite par le rayon de la Terre, on obtient une distance à vol d'oiseau entre ces deux villes de 16 887 km, ce qui est quasi-exactement la distance lue sur Google Maps (16 886 km).

Exercice 2 : Ascension d'une bulle de champagne :

1) D'après la loi des gaz parfaits, $PV = nRT = \frac{m}{M}RT$ (où M est la masse molaire du CO_2).

On a donc $\rho = \frac{m}{V} = \frac{PM}{RT}$. L'application numérique (attention à bien exprimer toutes les grandeurs en unités S.I.) donne $\rho_{CO_2} = 1,8kg/m^3$.

2) Calculons le rapport du poids de la bille sur la poussée d'Archimède qu'elle subit :

$$\frac{\|\vec{P}\|}{\|\vec{\Pi}_A\|} = \frac{\rho_{CO_2} V_{bulle} g}{\rho_{eau} V_{bulle} g} = \frac{\rho_{CO_2}}{\rho_{eau}} \simeq 1,8.10^{-3} \simeq 0,18\%$$

Ainsi le poids de la bulle est négligeable devant la poussée d'Archimède qu'elle subit.

3) Initialement, la bulle n'est soumise qu'à la poussée d'Archimède (puisqu'on néglige son poids) et elle accélère donc vers le haut. Mais plus elle va vite, plus la force de frottements exercée par l'eau devient importante, jusqu'à compenser exactement la poussée d'Archimède. L'accélération est alors nulle et la bille avance à vitesse constante (appelée vitesse limite).

Pour calculer la vitesse limite, il suffit de dire que quand elle est atteinte, l'accélération est nulle donc :

$$\vec{f} + \vec{\Pi}_A = \vec{0}$$

soit :

$$-k\vec{v}_{lim} - \rho_{eau}\frac{4}{3}\pi R^3\vec{g} = \vec{0}$$

ce qui donne après avoir remplacé k par son expression d'après la formule de Stokes et simplifié :

$$\vec{v}_{lim} = -\frac{2}{9}\frac{\rho_{eau}R^2}{\eta}\vec{g}$$

L'application numérique donne pour la norme de $\vec{v}_{lim}$:

$$v_{lim} = 0,54 m/s$$

4) On prend un axe (Oz) dirigé vers le gaut dont l'origine coïncide avec le bas de la coupe (point de départ de la bulle). En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la bulle dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on obtient :

$$\vec{\Pi}_A + \vec{f} = m\vec{a}$$

soit, en projetant sur $\vec{u}_z$ et en remplaçant les différents termes par leurs expressions :

$$\rho_{eau}\frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta\dot{z} = \rho_{CO_2}\frac{4}{3}\pi R^3\ddot{z}$$

Après simplifications, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{\rho_{eau}}{\rho_{CO_2}}g$$

en posant $\tau = \frac{2\rho_{CO_2}R^2}{9\eta}$ (constante de temps du problème étudié).
La solution générale de cette équation différentielle linéaire non homogène d'ordre 1 s'écrit comme la somme de la solution générale de l'équation homogène associée et d'une solution particulière (que l'on cherche ici sous forme d'une constante). On obtient :

$$v(t) = \lambda e^{-t/\tau} + \tau\frac{\rho_{eau}}{\rho_{CO_2}}g$$

On peut remarquer (après simplifications) que : $\tau\frac{\rho_{eau}}{\rho_{CO_2}}g = v_{lim}$.

On détermine ensuite λ à partir de la condition initiale $v(0) = 0$.

Au final, on obtient :

$$v(t) = v_{lim}(1 - e^{-t/\tau})$$

On cherche ensuite le temps t_0 tel que $v(t_0) = 0,99v_{lim}$, soit $v_{lim}(1 - e^{-t/\tau}) = 0,99v_{lim}$. La résolution de cette équation donne $t_0 = \tau ln(100) \simeq 4,6\tau \simeq 0,46\mu s$.

5) D'après la question précédente, on voit que la bulle atteint quasi-instantanément sa vitesse limite. Ensuite le mouvement est uniforme (il a lieu à vitesse constante). On peut donc écrire (en négligeant le régime transitoire) que :

$$T = \frac{h}{v_{lim}} \simeq 0,18s$$

Exercice 3 : Masses, poulie et plan incliné :

On suppose que la masse $2m$ se déplace vers le haut (le résultat est le même si elle se déplace vers le bas). Représentons les différentes forces auxquelles sont soumises les deux masses.

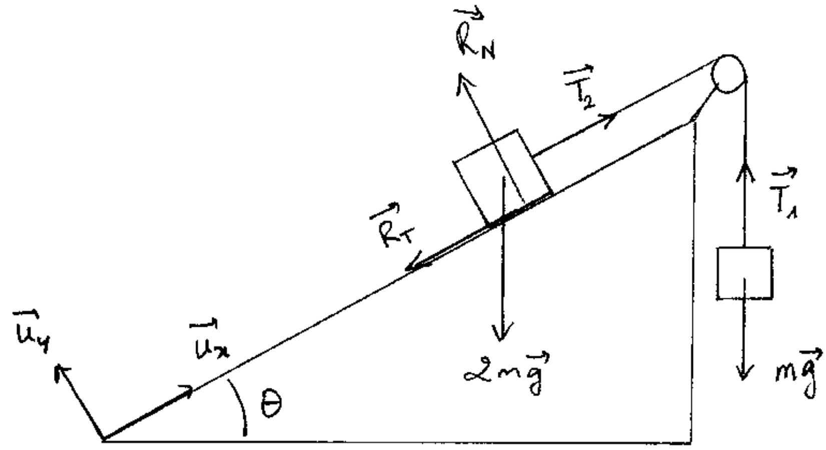

FIGURE 3 – Forces exercées sur les deux masses

La deuxième loi de Newton appliquée à la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne : $\vec{T_1} + m\vec{g} = m\vec{a}_1 = \vec{0}$ (car $\vec{v}_1 = c\vec{te}$).

On en déduit immédiatement que $T_1 = mg$, en notant $T_1 = \|\vec{T_1}\|$.

On applique alors la deuxième loi de Newton à la masse $2m$ (qui a aussi une accélération nulle puisque son mouvement est rectiligne et uniforme) :

$$2m\vec{g} + \vec{R_T} + \vec{R_N} + \vec{T_2} = \vec{0}$$

La projection de cette équation sur $\vec{u}_y$ (voir schéma) donne : $R_N - 2mg\cos(\theta) = 0$, soit $R_N = 2mg\cos(\theta)$.

Sa projection sur $\vec{u}_x$ donne :

$$-R_T + T_2 - 2mg\sin(\theta) = 0$$

En tenant compte du fait que $T_2 = T_1 = mg$ (puisque la norme de la tension du fil est constante le long du fil) et en utilisant les lois de Coulomb des frottements solides qui donnent : $R_T = f_d R_N$, on obtient :

$$-2f_d mg\cos(\theta) + mg - 2mg\sin(\theta) = 0$$

soit :

$$1 - 2\sin(\theta) = 2f_d\cos(\theta)$$

Cette équation est problématique car elle mélange $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$. Pour éviter ce problème, on va l'élever au carré et remplacer $\cos^2(\theta)$ par $1-\sin^2(\theta)$. On obtient au final l'équation suivante (équation du second degré en $\sin(\theta)$) :

$$4(1+f_d^2)\sin^2(\theta) - 4\sin(\theta) + 1 - 4f_d^2 = 0$$

Son discriminant vaut : $\Delta = 16 - 16(1 + f_d^2)(1 - 4f_d^2) = 16f_d^2(3 + 4f_d^2)$. Il est strictement positif donc l'équation admet deux racines réelles :

$$\sin(\theta) = \frac{1 \pm f_d\sqrt{3 + 4f_d^2}}{2(1 + f_d^2)}$$

Pour $f_d = 0,5$, on trouve $\sin(\theta) = 0$ *ou* $0,8$, soit $\theta = 0$ ou $\theta = 53°$. En pratique, pour $\theta = 0$, le système tombe vers la droite, et pour $\theta = 53°$, il tombe vers la gauche.

Barême pour la correction :

Exercice 1 :

— Question 1 : 2 points
— Question 2 : 0,5 points
— Question 3 : 3 points
— Question 4 : 0,5 points
— Question 5 : 1 point

Exercice 2 :

— Question 1 : 1 point
— Question 2 : 1 point
— Question 3 : 2 points
— Question 4 : 2 points
— Question 5 : 1 point

Exercice 3 :

6 points au total, dont 3 pour la partie "physique" (qui s'achève lorsqu'on a établi l'équation $1 - 2\sin(\theta) = 2f_d\cos(\theta)$), deux points pour la résolution mathématique de cette équation (qui peut avoir été faite différemment de ce qui a été fait dans mon corrigé) et un point pour l'application numérique.