Correction du DM5 de Sciences Physiques

Exercice 1 : Résonance en tension d'un circuit RLC série

1) Comme tous les composants sont en série, il suffit d'utiliser la formule du pont diviseur de tension pour relier l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ à l'amplitude complexe $\underline{E}$ de $e(t)$ (de plus, comme la phase initiale de $e(t)$ est nulle, son amplitude complexe est égale à son amplitude réelle : $\underline{E} = E$). On a donc :

$$\underline{U} = E \times \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = E \times \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2} = \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

On en déduit ensuite l'amplitude réelle U de $u(t)$, qui est le module de l'amplitude complexe :

$$U = |\underline{U}| = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

2) On cherche la valeur de ω pour laquelle $U(\omega)$ est maximale. Pour cela, il suffit en fait de rechercher les minima de la fonction (de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$) :

$$f : \omega \mapsto \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}$$

La dérivée de cette fonction s'écrit :

$$f'(\omega) = 2 \times \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) \times -2\frac{\omega}{\omega_0^2} + \frac{2\omega}{Q^2\omega_0^2} = \frac{2\omega}{\omega_0^2} \times \left(\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right)$$

Ainsi, $f'(\omega) = 0$ implique $\omega = 0$ ou bien :

$$\frac{1}{Q^2} - 2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = 0$$

soit :

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette dernière équation n'admet de solution réelle que si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$, soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si cette condition est vérifiée, on trouve que :

$$f'(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = 0 \textit{ ou } \omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Dans la suite, on notera $\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

Si on étudie le signe de f' (sur $\mathbb{R}_+$), on constate qu'elle est négative (et donc f décroissante) sur $]0, \omega_r[$ et positive (et donc f croissante) sur $]\omega_r, +\infty[$. Ainsi, si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, $f(\omega)$ est minimale en ω_r et donc l'amplitude U est *maximale* lorsque $\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$.

On retrouve le phénomène de *résonance* (ici résonance en tension). On constate que, contrairement à la résonance en intensité (étudiée en cours), qui a lieu exactement à la fréquence propre $\omega = \omega_0$, la résonance en tension a lieu à une pulsation légèrement inférieure $\omega = \omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ (cela dit, si $Q >> 1$, on constate que $\omega_r \simeq \omega_0$.

2) En notant $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite, on a :

$$\frac{U}{E} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Traçons cette fonction (sur $\mathbb{R}_+$) avec Python :

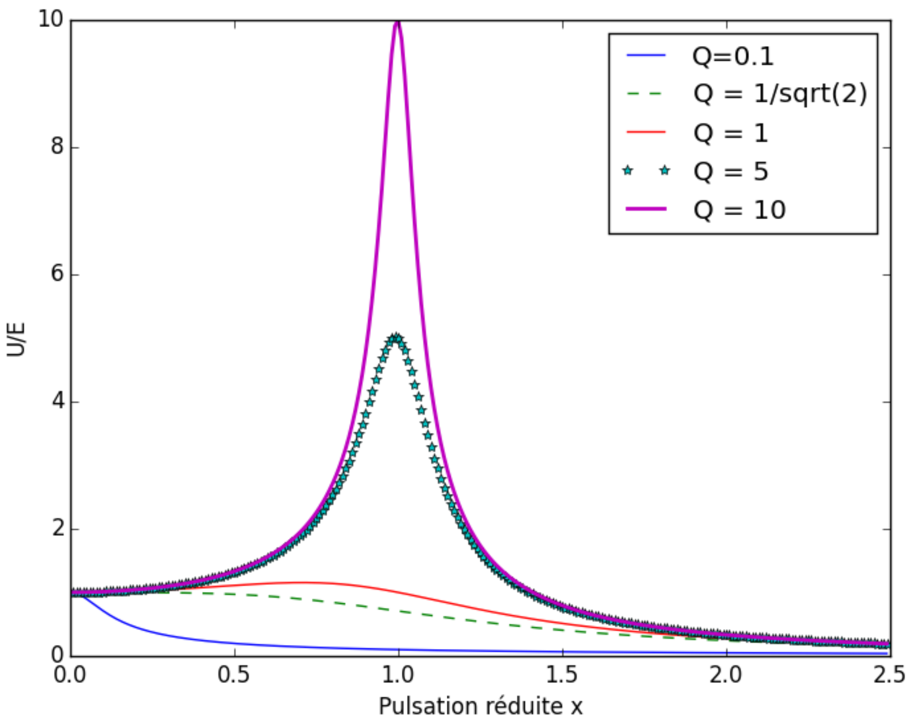

FIGURE 1 – Rapport $\frac{U}{E}$ en fonction de la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour différentes valeurs du facteur de qualité Q

4)

- Lorsque $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on n'observe pas de résonance, l'amplitude de $u(t)$ est maximale pour $x = 0$ (c'est à dire en régime continu), et ne fait que décroître lorsqu'on augmente la fréquence. Au contraire, lorsque $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, on constate qu'il existe une pulsation non nulle pour laquelle la réponse du système (c'est à dire ici la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur) est maximale : c'est le phénomène de résonance.
- Lorsque Q devient grand devant 1, on constate d'une part que la pulsation de résonance se rapproche de la pulsation propre du système (c'est à dire que la pulsation réduite x tend vers 1). De plus, la valeur de l'amplitude U de $u(t)$ à la résonance vaut environ QE, où E est l'amplitude de la tension imposée par la source. On voit ici pourquoi le phénomène de résonance peut être destructeur : si le facteur de qualité du circuit vaut 100, avec une source qui délivre une tension d'amplitude $10V$, le condensateur va se retrouver avec du $1000V$ à ses bornes (ce qui risque fortement de le faire claquer).

— Pour trouver la bande passante à $-3dB$, il suffit de chercher la plage de valeurs de x pour lesquelles $U > \frac{U_{max}}{\sqrt{2}}$. Pour $Q = 10$, on trouve graphiquement une largeur de bande passante $\Delta x \simeq 0,1$, soit $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \simeq 0,1$ soit $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq 10 \simeq Q$.
Remarque : la relation $Q = \frac{\Delta\omega}{\omega_0}$, qui est rigoureusement vraie pour la résonance en intensité, n'est vérifiée que de façon approximative et lorsque $Q >> 1$ pour la résonance en tension.

5) Pour $Q = +\infty$, on obtient la courbe de résonance suivante :

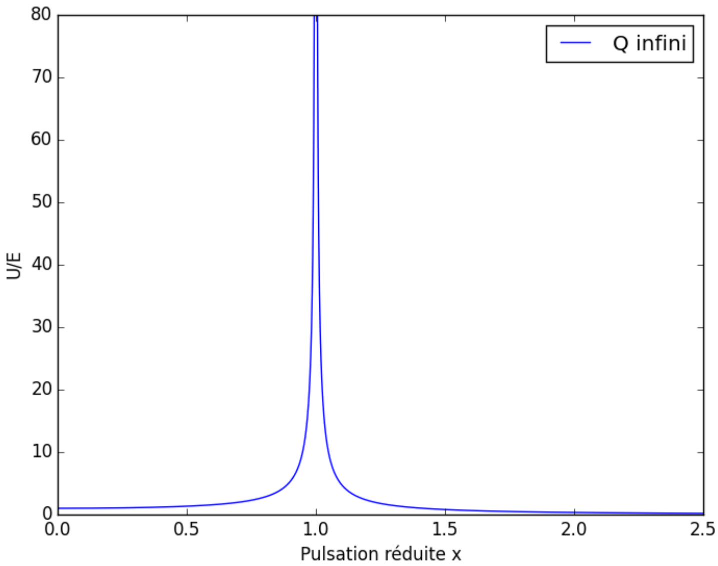

FIGURE 2 – Courbe de résonance en tension lorsque le facteur de qualité est infini.

Lorsque $Q = +\infty$, on constate que la courbe de résonance *diverge* lorsque la pulsation de l'excitation se rapproche de la pulsation propre du système (ainsi l'amplitude de la tension aux bornes du condensateur serait infinie lorsque $\omega = \omega_0$!). Heureusement, ce cas correspondrait à un système sans aucune dissipation (par exemple un circuit sans aucune résistance en électronique) et ne peut donc pas se rencontrer en pratique.

Exercice 2 : Détermination expérimentales des caractéristiques d'une bobine

1)

Grandeur	T(s)	ω(rad/s)	I_m(A)	U_m(A)	$Z_{AB}(\Omega)$
Valeur numérique	$4,0.10^{-3}$	$1,57.10^3$	$\frac{4}{20} = 0,2$	8	$\frac{8}{0.2} = 40$

Explications :

— Pour la pulsation, on a utilisé la formule $\omega = \frac{2\pi}{T}$

— Pour I_m on a pris l'amplitude de la tension en voie I (tension aux bornes de la résistance) divisée par R

— Pour Z_{AB} on a fait le rapport de U_m (tension aux bornes du dipôle AB) sur I_m (intensité qui traverse le dipôle AB)

2) u_{II} est en avance sur u_I car elle prend ses maxima avant.

3) On voit sur l'oscillogramme que l'écart temporel entre les deux tensions vaut $\Delta t = 0,5ms$ (regarder les zéros plutôt que les maxima, c'est plus précis).
On en déduit le déphasage : $\varphi = \omega \times \Delta t = 1,57.10^3 \times 0,5.10^{-3} = 0,78$ rad (ou $\frac{\pi}{4}$ rad).

4) Le dipôle AB est constitué de l'association en série de la résistance, la bobine et du condensateur. Ainsi, si la bobine est idéale, on a :

$$\underline{Z}_{AB} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

Ainsi, $R = \mathbf{Re}(\underline{Z}_{AB})$. Or $\underline{Z}_{AB}$ est un nombre complexe de module Z_{AB} et d'argument φ, ainsi :

$$\underline{Z}_{AB} = Z_{AB}e^{j\varphi} = Z_{AB}(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$$

Donc $\mathbf{Re}(\underline{Z}_{AB}) = Z_{AB}\cos(\varphi) = 40\cos(\frac{\pi}{4}) = 28,3\Omega$. Or $R = 20\Omega$: il y a donc une contradiction si on considère que la bobine n'a pas de résistance interne : la bobine a donc une résistance interne r non négligeable !

5) Si on considère que la bobine a une résistance interne r, l'expression de l'impédance du dipôle AB devient :

$$\underline{Z}_{AB} = R + r + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

On a donc $\mathbf{Re}(\underline{Z}_{AB}) = Z_{AB}\cos(\varphi) = R + r$, ce qui implique que $R + r = 28,3\Omega$, d'où $r = 8,3\Omega$.

6) On a d'autre part, en étudiant la partie imaginaire de l'impédance :

$$\mathbf{Im}(\underline{Z}_{AB}) = L\omega - \frac{1}{C\omega} = Z_{AB}\sin(\varphi)$$

Ainsi $L = \frac{Z_{AB}\sin(\varphi)}{\omega} + \frac{1}{C\omega^2} = 59$ mH.

Exercice 3 : Régime transitoire d'un circuit RLC parallèle

1) Pour répondre à cette question, nous allons nous intéresser en priorité aux deux grandeurs de ce circuit dont nous savons qu'elles sont continues :

— La tension u aux bones du condensateur

— Le courant i_1 qui traverse la bobine

À $t = 0^-$ ces deux grandeurs sont nulles de manière évidente (interrupteur ouvert, condensateur déchargé), donc elles le sont toujours à $t = 0^+$: $i_1(0^+) = 0$ et $u(0^+) = 0$. On a donc $i_3(O^+) = \frac{u(0^+)}{r} = 0$. De plus, la loi des mailles donne $u = E - Ri$, donc $i(0^+) = \frac{E}{R}$ et $i_2(0^+) = i(0^+) = \frac{E}{R}$ d'après la loi des noeuds.

2) En régime continu établi, on sait que la bobine se comporte comme un fil, donc $u(+\infty) = 0$ (tension aux bornes d'un fil), ce qui implique immédiatement que $i_3(+\infty) = \frac{u(+\infty)}{r} = 0$. On a également, puisque $u = E - Ri$ que $i(+\infty) = \frac{E}{R}$.
De plus, on sait que le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, donc $i_2(+\infty) = 0$. Il vient donc par la loi des noeuds que $i_1(+\infty) = i(+\infty) = \frac{E}{R}$.

3) On a, d'après la loi des mailles : $u = E - Ri$, or, d'après la loi des noeuds : $i = i_1 + i_2 + i_3$. On sait également que $i_2 = C\frac{du}{dt}$, donc :

$$u = E - Ri_3 - Ri_1 - RC\frac{du}{dt}$$

D'où, en dérivant :

$$\frac{du}{dt} = -R\frac{di_3}{dt} - R\frac{di_1}{dt} - RC\frac{d^2u}{dt^2}$$

soit, puisque $u = L\frac{di_1}{dt}$:

$$\frac{du}{dt} = -R\frac{di_3}{dt} - \frac{R}{L}u - RC\frac{d^2u}{dt^2}$$

Or $u = ri_3$ donc :

$$r\frac{di_3}{dt} = -R\frac{di_3}{dt} - \frac{Rr}{L}i_3 - rRC\frac{d^2i_3}{dt^2}$$

D'où :

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{R+r}{rRC}\frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC}i_3 = 0$$

ce qui est bien de la forme :

$$\frac{d^2i_3}{dt^2} + 2\lambda\omega_0\frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$$

en posant :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et :

$$\lambda = \frac{R+r}{2rR}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

4) L'équation caractéristique de cette équation différentielle s'écrit :

$$X^2 + 2\lambda\omega_O X + \omega_0^2 = 0$$

Son discriminant s'écrit donc :

$$\Delta = 4\lambda^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\lambda^2 - 1)$$

On sera dans le régime pseudo-périodique si l'équation caractéristique admet des racines complexes, c'est à dire si $\Delta < 0$, soit $\lambda < 1$, ce qui donne :

$$\frac{R+r}{2rR}\sqrt{\frac{L}{C}} < 1$$

5) Si la condition précédente est vérifiée, l'équation caractéristique admet deux racines complexes :

$$X_{1,2} = -\lambda\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$$

Pour plus de simplicité dans les notations, notons $\frac{1}{\tau} = \lambda\omega_0$ la partie réelle de ces racines et $\omega_p = \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$ la partie imaginaire de ces racines (pseudo-pulsation).
On sait alors que les solutions de l'équation différentielle sont de la forme :

$$i_3(t) = e^{-t/\tau}(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t))$$

De plus on a vu que $i_3(0^+) = 0$ donc $A = 0$ et $i_3(t) = Be^{-t/\tau}\sin(\omega_p t)$.
L'autre condition initiale dont on a besoin est $\frac{di_3}{dt}(0^+)$. On sait d'après la question 1) que $i_2(0^+) = \frac{E}{R}$ donc $C\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{R}$. Or $u = ri_3$ donc $\frac{di_3}{dt}(0^+) = \frac{E}{RrC}$.
On a donc, en utilisant l'expression de $i_3(t)$, que : $B\omega_p = \frac{E}{RrC}$, donc $B = \frac{E}{RrC\omega_p}$. On en déduit que :

$$i_3(t) = \frac{E}{RrC\omega_p}e^{-t/\tau}\sin(\omega_p t)$$

Exercice 4 : Vibrations d'un moteur

1) Appliquons la deuxième loi de Newton à la masse à l'équilibre :

$$\sum \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi :

$$-mg\overrightarrow{u_z} - k(l_{eq} - l_0)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$$

On en déduit, après projection sur $\overrightarrow{u_z}$, que :

$$l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

2) On utilise à nouveau la deuxième loi de Newton, appliquée au moteur de masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\sum \overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$$

Donc :

$$-mg\overrightarrow{u_z} - k(l - l_0)\overrightarrow{u_z} - \alpha\dot{z}\overrightarrow{u_z} + F_0\cos(\omega t)\overrightarrow{u_z} = m\ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

On prends la position d'équilibre comme origine de l'axe (Oz), ce qui revient à dire que l'on pose $z(t) = l(t) - l_{eq}$ (et donc on a $l - l_0 = z + l_{eq} - l_0 = z - \frac{mg}{k}$).
On en déduis, après projection sur $\overrightarrow{u_z}$, que :

$$-mg - k(z - \frac{mg}{k}) - \alpha\dot{z} + F_0\cos(\omega t) = m\ddot{z}$$

soit, après simplification :

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

3) En notation complexe, l'équation précédente s'écrit (sachant que dériver revient alors à multiplier par $j\omega$) :

$$(j\omega)^2\underline{Z} + \frac{\alpha}{m}j\omega\underline{Z} + \frac{k}{m}\underline{Z} = \frac{F_0}{m}$$

ce qui donne :

$$\underline{Z} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\frac{\alpha}{m}}$$

De plus, comme $v(t) = \frac{dz}{dt}$, on a, en notation complexe : $\underline{V} = j\omega\underline{Z}$, d'où l'expression de l'amplitude complexe de la vitesse du moteur :

$$\underline{V} = \frac{j\omega\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\frac{\alpha}{m}}$$

4) On en déduit l'amplitude réelle de $v(t)$:

$$V_0 = |\underline{V}| = \frac{\omega\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\frac{k}{m} - \omega^2)^2 + \omega^2\frac{\alpha^2}{m^2}}} = \frac{\omega\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}$$

en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$.
On a donc, en divisant le numérateur et le dénominateur par ω :

$$V_0 = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{4\lambda^2 + \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2}}$$

Pour tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $V_0(\omega)$, on remarque que cette fonction tend vers 0 lorsque $\omega \longrightarrow 0$ ou $\omega \longrightarrow +\infty$ et que cette fonction est maximale lorsque le dénominateur est minimal, c'est à dire pour $\omega = \omega_0$. la valeur de ce maximum est $V_{0,max} = \frac{F_0}{2\lambda m}$.
On obtient alors l'allure suivante :

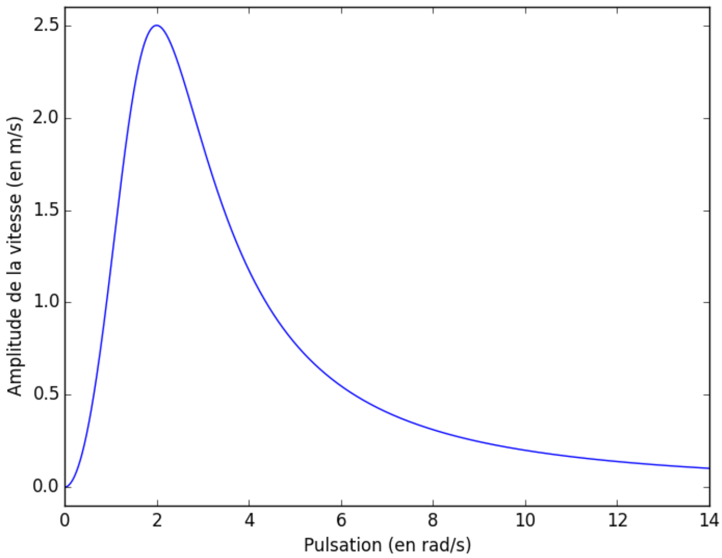

FIGURE 3 – Courbe de résonance en vitesse : V_0 en fonction de ω. Pour le tracé, on a pris $F_0/m = 5$ $m.s^{-2}$, $\lambda = 1$ s^{-1} et $\omega_0 = 2$ rad/s. La résonance a lieu lorsque $\omega = \omega_0$.

5) Le but ici est d'éviter que le système n'entre en résonance, ce qui pourrait conduire à des oscillations de très grande amplitude et endommager le moteur.

Avec le ressort de raideur k_1, la pulsation propre du système vaudrait $\omega_{0,1} = \sqrt{\frac{k_1}{m}} = 632$ rad/s, tandis qu'avec le deuxième ressort la pulsation propre vaudra : $\omega_{0,2} = \sqrt{\frac{k_2}{m}} = 316$ rad/s.

Sachant que la pulsation de l'excitation sera de $\omega = 628$ rad/s, il faut donc choisir le ressort 2 afin d'être le plus loin possible du "pic" de résonance.

Barême pour l'auto-correction :

Exercice 1 :

1) 2 pt ; 2) 2 pt ; 3) 2 pt ; 4) 2 pt ; 5) 1pt

Exercice 2 :

1) 1,5 pt ; 2) 0,5 pt ; 3) 1 pt ; 4) 1 pt ; 5) 2 pt ; 6) 2 pt

Exercice 3 :

1) 2 pt ; 2) 1 pt ; 3) 3 pt ; 4) 1 pt ; 5) 2 pt

Exercice 4 :

1) 1 pt ; 2) 2 pt ; 3) 2 pt ; 4) 2 pt ; 5) 1 pt

Le total est donc de 34. Vous ramènerez la note sur 20 en faisant une règle de trois.